П.В. Маковецкий



Издание пятое, исправленное и дополненное
Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва 1984

22.3
М 16
УДК 53(023)

Пётр Васильевич Маковецкий. **Смотри в корень!**

Научно-популярная. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984 г.

Книга представляет собой сборник задач из различных областей науки (главным образом физики, астрономии, космонавтики, техники и др.). Все задачи оригинальны. Отличительная черта задач – парадоксальность ответа или вопроса, что повышает интерес читателей к самостоятельному решению. Этому же способствует и то, что задачи, как правило, касаются обычных, «очевидных» вещей, но имеют неожиданное решение. Сами задачи и способы их решения часто содержат элементы эвристики, требуют творческого подхода, причём по мере продвижения к решению читателю подсказываются очередные вехи на его пути. Парадоксальность задач подчёркивается их юмористическим освещением и шуточными эпиграфами

Книга адресована школьникам старших классов, абитуриентам, учителям, студентам и всем, кто интересуется физикой и её применениями.

В настоящем документе используется сквозная нумерация задач и рисунков. К заголовкам задач, не вошедших в 5-е издание, в сносках указано издание, в котором эта задача опубликована. Такие задачи приводятся по 3-му и 4-му изданию соответственно.

Текст издания:

Маковецкий П.В. Смотри в корень! Сборник любопытных задач и вопросов.
3 изд. – М.: «Наука», 1976; 4 изд. – М.: «Наука», 1979; 5 изд. – М.: «Наука», 1984.

$$М\frac{1704000000-011}{053(02)-84}169-84$$

К читателям

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 66

УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Вы овладеваете физикой, математикой, географией, астрономией и другими науками. Вы твёрдо знаете, что все эти науки пригодятся в жизни: ведь вы собираетесь стать космонавтами и полярниками, геологами и лётчиками, строителями новых городов и конструкторами вычислительных машин, моряками и астрономами.

А прочно ли вы усвоили науки? Сумеете ли применить их в жизни? В этой книге вам предлагаются простые (хотя иногда и с хитринкой!) вопросы и задачи. Попробуйте их разрешить. Если это у вас получится, значит, ваши знания прочны и, что самое главное, вы умеете их в нужный момент мобилизовать.

Чаще всего суть предлагаемых задач состоит в объяснении явлений обычных, часто встречающихся, но тем не менее удивительных при внимательном изучении. Отличительной особенностью большинства задач является некоторая неожиданность ответа (или вопроса). Автор часто предлагал эти задачи и школьникам, и студентам, и инженерам. Как правило, ответ был немедленным и категорическим, но… неправильным. И только после того, как покажешь решающему ошибочность его ответа, он начинает глубже анализировать задачу и, естественно, находит правильное решение.

Не исключено, что и у вас будет сначала напрашиваться неправильный ответ. Автор позаботился о том, чтобы вы по возможности самостоятельно добрались до истины. С этой целью изложение каждой задачи разбито на три раздела: **А**, **Б** и **В**.

В первом разделе формулируются условия задачи. Прочитав этот раздел, вы должны остановиться, потому что второй раздел, **Б**, – это уже подсказка. Если вы, прочитав условия задачи, сразу же устремитесь за подсказкой, то, как вы сами понимаете, это будет нехорошо.

Переступить за букву **Б** вам следует только после того, как вы найдёте своё решение или по крайней мере достаточно поломаете голову над его поисками. Впрочем, не всегда за буквой **Б** вы найдёте непосредственное указание на правильный путь. Довольно часто этот раздел только предостерегает вас от ошибок. Иногда в этом разделе автор даже сопровождает вас на ложном пути, доходит вместе с вами до тупика и затем поворачивает обратно.

Прочитав до буквы **В**, вы вновь должны остановиться. Теперь вы видите, что очевидные, как вам казалось, истины не являются таковыми. Это заставит вас более внимательно подойти к задаче. Правда, иногда вы сами, без подсказки, найдёте правильное решение. Тогда, конечно, при чтении подсказки вам покажется, что автор ломится в открытую дверь, пытаясь объяснить уже понятное. Ну, что ж! Очень хорошо! Чем чаще раздел **Б** не даёт вам ничего полезного, тем выше уровень ваших знаний и ваша сообразительность.

Третий раздел, **В**, служит для того, чтобы вы сверили своё решение или объяснение с тем, которое автор считает правильным. Кроме того, в некоторых случаях в этом разделе вы найдёте сведения по практическому использованию явления, рассмотренного в задаче.

Хорошо, если вы наблюдательны во время эксперимента в физическом кабинете. Но ещё лучше, если наблюдательность не покинет вас и на время отдыха, когда вы вышли из физического кабинета на природу – этот всеобъемлющий физический (и не только физический) кабинет. Будьте наблюдательны в лесу, на озере, в кино, на стадионе, на улице, в поезде, в самолёте, на сеансе космовидения, под звёздным и облачным небом. Вы увидите много удивительного. Правда, при одном условии: ваш транзистор в это время будет выключен. В вашей встрече с природой это третий лишний.

«Удивительное рядом» – так назвал народный артист Сергей Образцов один из своих документальных – и именно поэтому сказочно прекрасных – кинофильмов. Именно так назвал бы автор эту книгу, если бы ему это название пришло в голову первому. Удивительное рядом! Не проходи мимо! Будь любопытен! Смотри в корень!

Когда выпускаешь солидный научный труд – замечаний нет: солидные читатели снисходительно закрывают глаза на промахи коллеги. А может быть, его просто не читают: солидные больше пишут, чем читают. У этой же книги оказался самый дотошный читатель. Писем было много. И большинство – полезные для книги. Автор благодарит всех, приславших письма, даже ошибочные, потому что ошибки читателей – это тот хлеб, которым питается книга. Он просит прощения у тех читателей, которым не успел ответить.

Должен извиниться перед теми читателями-инженерами, которые просят у меня консультации по станкостроению, ядерной спектроскопии, термодинамике, инженерной психологии и вечным двигателям. Я не специалист в этих областях. Моя специальность – радиолокация.

В третьем издании расширен текст решения некоторых задач и добавлено 15 новых. В четвёртом издании заменено и добавлено несколько новых задач. Некоторые («Спортлото и жизнь на других планетах», «Свидание под часами», «Пароль разума», «Расписание связи с внеземными цивилизациями», «Ищи под фонарём!») оказались задачами повышенной трудности. Впрочем, трудности эти привели лишь к увеличению числа ступенек эвристической лестницы, ведущей к принятию творческого решения. Размер же каждой ступеньки этой лестницы автор старался выдерживать неизменным, чтобы ни одна из них не оказалась непреодолимой для читателя.

Автор благодарит рецензента Г.М. Хованова за множество полезных рекомендаций.

I. Планета дорогая по имени Земля

1. Путешествие на северо-восток

А

Если идти всё время на северо-восток, то куда придёшь?

Б

Однажды нёс пастух куда-то молоко,
Но так ужасно далеко,
Что уж назад не возвращался.
Читатель! Он тебе не попадался?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Пастух, молоко и читатель» (басня)

Как правило, на этот вопрос легкомысленно отвечают: обойду земной шар и приду на то же место, откуда вышел. Это, разумеется, неверно.

Предположим, например, что вы отправились на северо-восток из Киева и добрались уже до Москвы, т.е. сменили широту на более северную. Чтобы попасть опять в Киев, вам неминуемо придётся где-то в дальнейшем вернуться на более южную широту Киева, т.е. прекратить своё движение на северо-восток и идти на юг, юго-запад или юго-восток, что будет нарушением условия нашей задачи. Куда же вы попадёте при соблюдении условий?

В

Магнитная стрелка, непреодолимо влекомая к северу, подобна мужу, который блюдёт законы.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 32

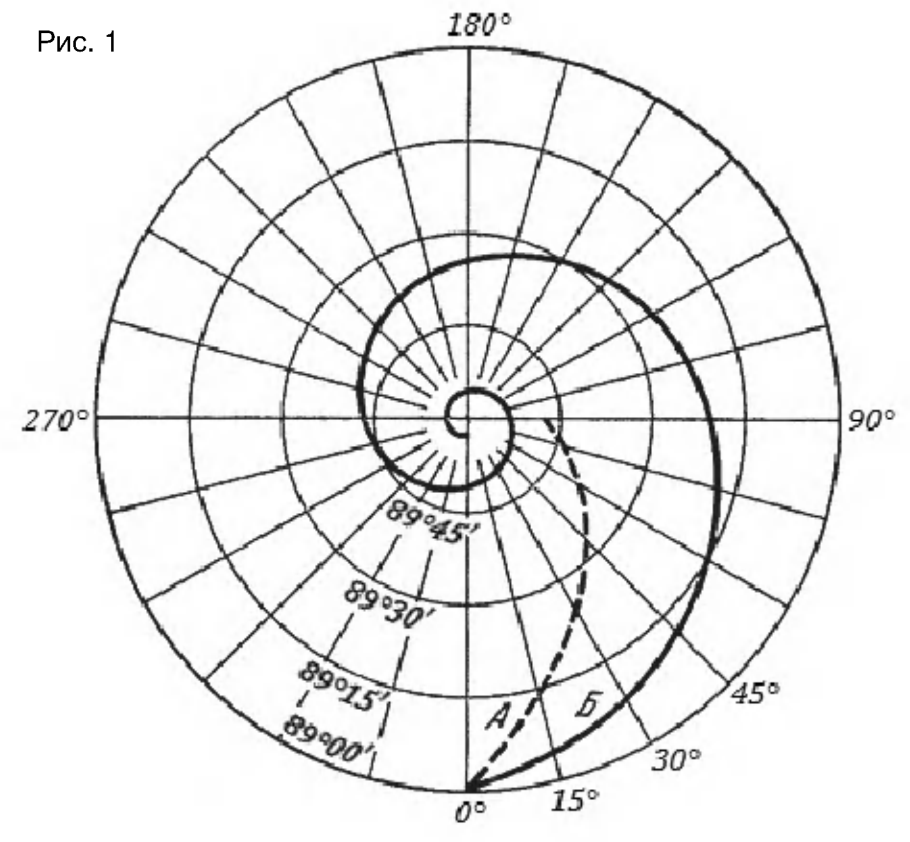
Северо-восток – точка горизонта, которая на 45° восточнее севера и на 45° севернее востока. Идти на северо-восток – значит идти всё время под углом 45° к меридианам и параллелям, с каждым шагом увеличивая свою северную широту и восточную долготу. Долгота неисчерпаема: как далеко на восток ни была бы данная точка, всегда найдётся точка ещё восточнее. Этого нельзя сказать о широте: если с каждым шагом увеличивать свою северную широту, то в конце концов она будет полностью исчерпана, т.е. мы окажемся на Северном полюсе, где широта максимальна и равна 90°. Попав на Северный полюс, мы уже не сможем продолжать движение на северо-восток, так как там такого понятия не существует. Перефразируя Пруткова, мы можем сказать, что муж, который блюдёт условия задачи, будет, подобно магнитной стрелке, непреодолимо влеком к северу.

Легко сообразить, что если идти на юго-восток (или юго-запад), то мы придём на Южный полюс. И вообще, под каким бы углом мы ни пересекали параллели, мы обязательно придём либо на Северный, либо на Южный полюс, если будем выдерживать этот угол постоянным. И только если идти точно на восток или на запад, то

мы ни на тот, ни на другой полюс не попадём, а действительно придём на то место, откуда вышли.

Интересно проследить путь, по которому мы будем идти. На географической карте в меркаторской проекции (где меридианы и параллели – два взаимно перпендикулярных семейства параллельных прямых) наш путь будет прямой линией, поднимающейся под углом 45° к параллелям. Линия, составляющая постоянный угол со всеми пересекаемыми параллелями, называется локсодромией и широко используется в морской навигации ввиду простоты вождения кораблей по ней.

Рис. 1



Особенно интересен последний участок нашего пути – у полюса. На рис. 1 показаны окрестности Северного полюса (район, охватываемый 89-й параллелью). Столь малый район можно считать приблизительно плоским. Тогда путь под постоянным углом к меридианам и параллелям имеет вид логарифмической спирали. Чем ближе к полюсу, тем мельче витки этой спирали (показать на рисунке все витки невозможно), причём число витков спирали бесконечно велико, хотя длина спирали всё-таки конечна. Чем меньше угол между траекторией нашего пути и параллелями, тем гуще витки спирали, которую мы описываем (сравните кривые *А* для 45° и *Б* для 15°).

2. Солнце зайдёт не там

А

Сегодня Солнце взошло точно на востоке. В какой точке оно зайдёт?

Б

Обычно рассуждают так. Если Солнце взошло точно на востоке, то, очевидно, сегодня равноденствие – день равен ночи. Следовательно, Солнце зайдёт точно на за-

паде. Это неверно. Равноденствие – это событие, которое длится не весь сегодняшний день, а только мгновение.

В

Момент равноденствия – момент, когда Солнце, двигаясь по эклиптике, пересекает небесный экватор. Если при этом оно переходит из южного полушария в северное, то для нас, живущих в северном полушарии, это момент весеннего равноденствия, если из северного в южное – осеннего. Восток – точка, где пересекаются линии горизонта и небесного экватора. Если Солнце взошло точно на востоке, то, значит, в этот момент оно было и на небесном экваторе. А поскольку оно всегда находится на эклиптике, то, следовательно, в этот момент оно было в точке пересечения экватора и эклиптики, т.е. в точке равноденствия. Иными словами, момент равноденствия совпал с моментом восхода. Пусть это было весеннее равноденствие. Тогда к вечеру Солнце успеет подняться над небесным экватором (уйти по эклиптике от точки равноденствия) на заметную величину. Следовательно, оно уже зайдёт не на западе, а севернее запада. Осенью Солнце, взошедшее точно на востоке, зайдет южнее запада. В первом случае день оказался длиннее 12 часов, во втором – короче.

Подсчитаем, насколько севернее или южнее запада зайдёт Солнце.

Земная ось наклонена к плоскости орбиты Земли на $23{,}5°$. Поэтому в день летнего солнцестояния Солнце оказывается на $23{,}5°$ выше небесного экватора, в день зимнего солнцестояния – на столько же ниже экватора. В остальные дни угловое расстояние α между Солнцем и небесным экватором меняется приблизительно по синусоидальному закону (если пренебречь некоторыми тонкостями сферической тригонометрии и неравномерностью движения Земли по орбите):

$$\alpha = 23{,}5° \sin\frac{2\pi t}{T},$$

где $T \approx 365$ суток (1 год).

Очевидно, при такой записи за начало координат надо принять момент весеннего равноденствия: именно он даёт $\alpha = 0$ при $t = 0$ и $\alpha > 0$ при $t > 0$.

От восхода до захода пройдёт приблизительно $0{,}5$ суток. За это время Солнце поднимется над небесным экватором на угол

$$\alpha = 23{,}5° \sin\frac{2\pi \cdot 0{,}5}{365} \approx 0{,}2°.$$

Если мы находимся на экваторе (земном), где небесный экватор проходит через точки восток–зенит–запад, то Солнце, взошедшее точно на востоке, пойдёт почти вертикально к зениту, пройдёт севернее него на $0{,}1°$ (за 6 часов оно сместится к северу от экватора на $0{,}1°$) и зайдёт почти вертикально севернее запада на $0{,}2°$.

На широте Ленинграда (автор часто будет использовать эту широту не только потому, что он ленинградец, но главным образом потому, что она равна $60°$, а $\cos 60° = 0{,}5$, что удобно для вычислений) небесный экватор проходит под углом $30°$ к горизонту, и приблизительно под таким пологим углом Солнце в этот день будет восходить и заходить.

На рис. 2 показаны горизонт с точкой запада W, небесный экватор, путь Солнца CAB (почти параллельный экватору), успевшего за день подняться над экватором на $\alpha = 0{,}2°$. Точку B, в которой Солнце зайдёт, можно найти из треугольника WAB.

Правда, этот треугольник не плоский, а сферический: он расположен на небесной сфере. Но поскольку он мал, то мы не допустим большой ошибки, если будем считать его плоским. Искомый сдвиг точки захода B относительно точки запада W равен

$$WB = \frac{WA}{\cos 60°} = \frac{0{,}2°}{0{,}5} = 0{,}4° \,.$$

Если вспомнить, что угловой диаметр Солнца приблизительно равен 0,5°, то получаем, что точка захода сместилась почти на диаметр Солнца.

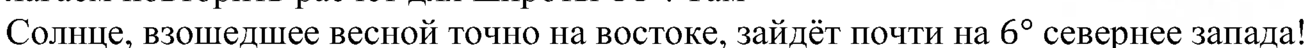


Рис. 2

Для тех, кому эта величина покажется недостойной внимания, предлагаем повторить расчёт для широты 88°. Там Солнце, взошедшее весной точно на востоке, зайдёт почти на 6° севернее запада!

Иногда проницательный читатель по поводу этой задачи делает весьма интересное замечание: момент перехода Солнца через небесный экватор и момент восхода Солнца теоретически мгновенны. Поэтому абсолютно точно совпасть они практически не могут. Следовательно, Солнце никогда не может взойти точно на востоке: если сегодня оно взошло чуть-чуть южнее востока, то завтра оно взойдёт чуть-чуть севернее. Действительно, для данного места вероятность абсолютно точного совпадения бесконечно мала. Но ведь на Земле в любой момент имеется такая точка, где Солнце как раз в этот момент восходит. Значит, где-то оно восходит и точно в момент равноденствия. Такая точка на Земле не одна – это целая линия, некоторый вполне определённый меридиан[1]. Будем считать, что мы находимся именно на этом меридиане.

3. Несерьёзный вопрос

А

Сегодня день равен ночи. Чему равна их общая продолжительность?

Б

Те, кто не решал предыдущей задачи, немедленно отвечают, что, конечно, общая продолжительность составляет 24 часа 00 минут 00 секунд, что так бывает не только в те сутки, когда день равен ночи, но и в любые другие.

Покажем, что этот скоропалительный ответ неверен. Комбинация «день и ночь» $(t_д + t_н)$ – это время от одного восхода Солнца до другого. Но весной, например, Солнце каждый день восходит раньше, чем накануне. Следовательно,

$$t_д + t_н < 24 \text{ часов} \,.$$

---

[1] Меридиан – в момент равноденствия. А вообще граница ночи и дня наклонена к меридианам (см. рис. 9).

С другой стороны, весной Солнце заходит каждый день позже, чем вчера. Следовательно, сумма «ночь + день» (от захода до захода) ведёт себя совсем не так, как сумма «день + ночь» (от восхода до восхода):

$$t_{\text{д}} + t_{\text{н}} > 24 \text{ часов}.$$

От перестановки слагаемых изменилась сумма! Чудеса в решете, которые вам предстоит разоблачить.

В

Как ясно из предыдущей задачи, день может быть равен ночи только при условии, что момент равноденствия совпал с границей ночи и дня, т.е. с моментом восхода, если имеется в виду равенство предыдущей ночи и текущего дня, или с моментом захода, если речь идёт о текущем дне и последующей ночи.

Рассмотрим весеннее равноденствие, совпавшее с восходом Солнца в Ленинграде. Продолжительность дня будет больше 12 часов на время, которое нужно затратить Солнцу на прохождение по небу дополнительного отрезка $AB°$ на рис. 2:

$$AB° = WA° \cdot \operatorname{tg} 60° = 0{,}2° \cdot 1{,}73 \approx 0{,}35°.$$

Полный суточный путь Солнца по небу составляет приблизительно 360° (в день равноденствия Солнце описывает почти точно большой круг; в другие дни, когда Солнце далеко от экватора, его путь был бы малым кругом). Следовательно, удлинение дня (в минутах) сверх 12 часов можно найти из пропорции

$$\frac{t_{AB}}{24 \cdot 60} = \frac{AB°}{360°},$$

откуда

$$t_{AB} = AB° \cdot 4 \approx 1{,}4 \text{ минуты}.$$

Для дальнейших рассуждений удобно использовать местное время. Точно в 12 часов по местному времени Солнце находится точно на юге[1]. В рассматриваемый день Солнце взошло точно в 6 ч (в этой задаче мы не учитываем поправок на[2] атмосферную рефракцию). Зайдёт оно в 18 часов + 1,4 минуты. Вследствие симметрии относительно точки равноденствия предыдущая ночь также была равна 12 часам + 1,4 минуты. Следовательно, вчера Солнце зашло на 1,4 минуты раньше 18 часов, а сумма предыдущей ночи $t_{\text{н}0}$ и сегодняшнего дня $t_{\text{д}1}$ равна

$$t_{\text{н}0} + t_{\text{д}1} = 24 \text{ часа } 2{,}8 \text{ минуты}.$$

Завтра же Солнце взойдёт на 2 · 1,4 = 2,8 минуты раньше, чем сегодня. Следовательно, сумма сегодняшнего дня $t_{\text{д}1}$ и последующей ночи $t_{\text{н}1}$ равна

$$t_{\text{д}1} + t_{\text{н}1} = 23 \text{ часа } 57{,}2 \text{ минуты}.$$

Итак, в самом деле весной сумма «ночь + день» длиннее суммы «день + ночь», но никакого чуда в этом нет: просто каждая последующая ночь короче предыдущей,

$$t_{\text{н}1} < t_{\text{н}0},$$

[1] Это предложение может служить определением местного времени. Мы подчёркиваем это во избежание путаницы, так как иногда в быту местным временем называют то, которое следует называть декретным временем данного пояса.

[2] Астрономы и одесситы говорят: *за* атмосферную рефракцию.

и если бы мы учли это обстоятельство в приведённых в подсказке неравенствах с помощью индексов, то никакого противоречия не получили бы.

Наоборот, осенью, когда каждая ночь длиннее предыдущей,

$$t_{н0} + t_{д1} < 24 \text{ часов}, \quad t_{д1} + t_{н1} > 24 \text{ часов}.$$

И только вблизи дней зимнего и летнего солнцестояния, когда дни и ночи почти не меняют своей длительности, всё становится на свои места: сумма дня и ночи равна 24 часам, причём неважно, о какой ночи идёт речь – о предыдущей или последующей.

Сумма дня и ночи отличается от 24 часов тем больше, чем больше широта места. На экваторе этого явления нет, там всегда день равен ночи, а их сумма всегда равна 24 часам.

4. Утро на полюсе

А

Солнце на Северном полюсе взошло на московском меридиане. Где оно взойдёт следующий раз?

Б

Следующий раз оно взойдёт ровно через год. Если помнить об этом, то задача решается просто.

В

Год длится приблизительно 365 суток 6 часов. Следовательно, от одного восхода на полюсе до другого Солнце успеет совершить вокруг Земли 365 оборотов с одной четвертью[1]. Если бы оно за год совершило целое число оборотов, то снова взошло бы на московском меридиане. На самом же деле до восхода понадобится ещё 6 часов, так что Солнце взойдёт на 90° правее московского меридиана (если смотреть с Северного полюса), т.е. на меридиане Монтевидео.

Разумеется, момент восхода оба раза нужно отсчитывать одинаково: например, по моменту появления из-за горизонта верхнего краешка Солнца. Без этой оговорки весь вопрос о точке восхода теряет смысл: Солнце на полюсе восходит так медленно, что на восход всего диска уходит более суток, т.е. за время восхода Солнце побывает во всех точках горизонта. Любопытно, что если при этом температура воздуха начнёт возрастать со скоростью более 6°С в час, то за счёт изменения преломления лучей в воздухе видимый диск Солнца прекратит подъём и станет опускаться. Таким образом, весь акт восхода Солнца на полюсе может содержать одну-две «неудачные попытки»!

---

[1] Здесь автор пользуется более удобной для этой задачи библейской точкой зрения на вопрос, что́ вокруг чего вращается. Иначе пришлось бы ввязываться в неуместные для данной задачи объяснения, что относительно «неподвижного» звёздного фона Земля совершает за год ровно на один оборот больше (разница вызвана тем, что, кроме вращения вокруг собственной оси, Земля ещё движется и вокруг Солнца, см. задачу «А всё-таки она вертится!»).

Отметим, что хотя относительно земных ориентиров (Москва, Монтевидео) Солнце на полюсе каждый раз восходит по-разному, относительно звёздного фона – всегда одинаково: ведь в этот момент оно находится в точке весеннего равноденствия (в созвездии Рыб), положение которой относительно звёзд в пределах человеческой жизни можно считать неизменным (за 26 000 лет эта точка совершает по эклиптике полное круговое путешествие, за год смещается менее чем на угловую минуту).

5. С календарём вокруг полюса

А

Вблизи 180-го меридиана проходит линия смены дат. Корабли, пересекающие её с востока на запад, должны пропустить один день в своём календаре, с запада на восток – нумеровать два дня подряд одним и тем же числом.

Вы путешествуете с востока на запад строго по параллели $89°59'44''$, т.е. на расстоянии $r = 500$ м от Северного полюса. Длина этой параллели равна $l \approx 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 = 3140$ м.[1] За 6 часов вы прошли 31,4 км, т.е. пересекли линию смены дат 10 раз. Нужно ли сдвигать ваш календарь на 10 дней вперёд?

Б

Здравый смысл подсказывает, что не нужно. Но ведь линия смены дат введена тоже по требованию здравого смысла! Если вас смущает то, что путешествие проходит рядом с полюсом, и вы не уверены, что линия смены дат доходит до са́мого полюса, то заверяем вас, что доходит. Кроме того, аналогичное путешествие можно совершить не только у полюса. Космонавт, пересекший за сутки 16 раз линию смены дат в направлении с востока на запад, почему-то не пропускает 16 дней в своём календаре после возвращения на Землю. Космонавт, совершивший аналогичный полёт в направлении с запада на восток, после приземления не возвращает календарь на 16 дней назад.

Наконец, можно так поставить дело, что и обычный океанский корабль, совершающий кругосветное путешествие, обойдётся без смены дат. Но что для этого должны делать на корабле?

В

Где начало того конца, которым оканчивается начало?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 78

Вспомним сначала, почему вообще возникает необходимость в смене даты. Вы отправились на корабле вокруг света (через Панамский и Суэцкий каналы, например). Допустим, что вы передвигаетесь каждый день на 15° к западу, следовательно, за 24 дня вы обойдёте весь земной шар. Поскольку вы уходите каждый день на 15°

[1] Формула верна только в той окрестности полюса, где ещё можно не учитывать кривизну поверхности Земли.

на запад, то для вас Солнце каждый день восходит и заходит на 1 час позже, чем накануне. Если не предпринимать никаких мер, то по вашим часам ночь будет запаздывать ежедневно на час и через двенадцать суток день и ночь поменяются местами. Пользоваться часами в таких условиях очень неудобно. Поэтому, чтобы согласовать ваши часы с тёмным и светлым временем суток, вам придётся ежедневно переставлять их на час назад, т.е. сделать продолжительность своих суток равной 25 часов. Но тогда за 24 дня путешествия вы переставите часы на 24 часа назад, т.е. на целые сутки. Таким образом, вы потеряли одну смену дня и ночи: для вас Солнце восходило на один раз меньше, чем для оставшихся на берегу, так как вы двигались в направлении, противоположном направлению суточного вращения Земли, и совершили вокруг земной оси на один оборот меньше, чем сама Земля. Поэтому вам придётся выкинуть из вашего календаря один дополнительный листок, чтобы жить в ногу с остальным человечеством. Во избежание путаницы условились пропускать одно число в момент пересечения кораблём вполне определённой линии – линии смены дат. Эта линия проходит вблизи 180-го меридиана в обход суши (иначе дату менять пришлось бы не только морякам, но и пешеходам, идущим в гости к своим соседям).

Путешествуя на восток, вы двигались бы в ту же сторону, куда вращается Земля, и, закончив кругосветное путешествие, вы совершили бы вокруг земной оси на один оборот больше, чем Земля. При этом, переставляя каждый день часы вперёд, вы согласовывали бы их с поясным временем того места, где вы находитесь, и к концу путешествия вы переставили бы их на 24 часа вперёд. Во избежание недоразумений в отношениях с внешним миром вам теперь следует при пересечении линии смены дат заменить сегодняшний листок календаря на вчерашний.

Совершенно ясно, что если команда корабля готова перенести то неудобство, что во время плавания ночь и день совершат круговое путешествие по циферблату корабельных часов, то можно не переводить часы, т.е. жить в течение всего путешествия по времени того порта, из которого вышли. Но тогда нет необходимости и менять дату при переходе через линию смены дат. Только листок календаря вам надо будет срывать регулярно в момент, когда его срывают в том порту, по времени которого вы живёте, т.е. когда корабельные часы показывают 24 часа, невзирая на то, полночь сейчас, полдень или восход Солнца.

Теперь о нашей задаче. Если бы вы, путешествуя вокруг полюса, захотели, подобно мореплавателю, переставлять часы и менять даты, то вам пришлось бы переставлять часы на 1 час назад каждые полторы минуты (предполагаем, что вы идёте равномерно в течение всех шести часов путешествия). Через 36 минут вы переставили бы свои часы на целые сутки назад, т.е. забрели во вчерашний день, и чтобы вернуться в сегодняшний, вам пришлось бы сменить дату.

Конечно, все эти манипуляции очень неудобны и, следовательно, бессмысленны. Лучше всего согласовать свои часы с московским временем (или любым другим) и срывать листки календаря ровно в 24 часа по вашим часам, тем более что восходы и заходы Солнца при путешествии вблизи полюса вовсе не связаны с числом ваших оборотов вокруг него.

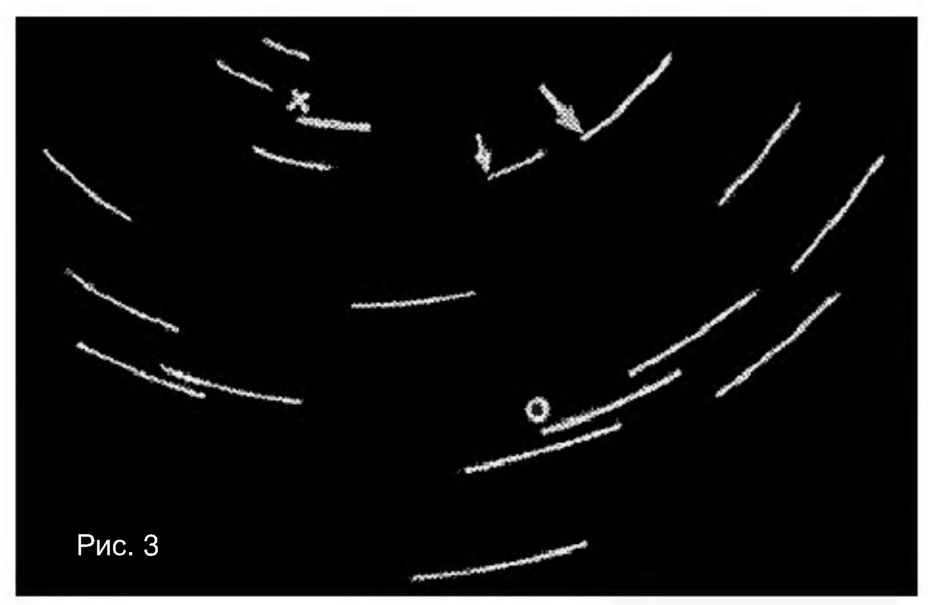
Аналогично поступают и космонавты. Правда, для них восходы и заходы Солнца оказываются совсем иными, чем для путешествующих вокруг полюса. Но смены дня и ночи для космонавта настолько часты (или же совсем отсутствуют – для летящего, например, к Марсу), что бытовая часть распорядка дня космонавта не может

быть связана с ними. Поэтому космонавт всегда живёт по единому времени – московскому – и меняет листки календаря вместе с москвичами.

6. А всё-таки она вертится!

А

Перед вами фото (рис. 3). Вы уже догадались: это снимок ночного неба. А не могли бы вы по этому снимку определить, как долго был открыт затвор фотоаппарата при съёмке?


Рис. 3

Б

Этим снимком обычно иллюстрируют кажущееся вращение небосвода, вызванное вращением Земли вокруг своей оси. Вы, конечно, знаете, что время, за которое Земля совершает один оборот вокруг своей оси, называется сутками. Этих знаний вполне достаточно, чтобы решить задачу. Остальные сведения вы найдёте на фото.

Определите также, какие созвездия попали на снимок.

В

При мгновенной съёмке звезда на снимке получается в виде точки. Если же затвор фотоаппарата открыт долго, то будут засняты все положения, которые звезда примет за время экспозиции, отчего каждая звезда изобразится дугой, тем большей, чем дольше открыт затвор. Ясно, что если затвор открыть ровно на сутки (и если бы в продолжение целых суток длилась ночь и видны были звёзды – ситуация, возможная зимой в Заполярье), то каждая звезда совершила бы целый оборот и изобразилась бы в виде окружности. Центром всех окружностей был бы небесный полюс – точка на небесной сфере, лежащая на продолжении земной оси (в наш век эта точка находится вблизи Полярной звезды – в созвездии Малой Медведицы). Открывая затвор на 12 часов, мы получили бы изображения звёзд в виде дуг длиной в 180°. Таким образом, длина дуги α, в которую превращается звезда на снимке, пропорциональна времени открытия затвора t:

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{t}{24},$$

где α – в градусах, t – в часах.

Итак, чтобы вычислить t, нужно измерить α. Это можно сделать, например, с помощью транспортира, совместив его центр с центром вращения изображения. А этот центр можно найти, например, как точку пересечения двух прямых, перпендикулярных к данной дуге в точках на обоих её концах (и к любой другой). Чтобы уменьшить при этом влияние ошибок построения, целесообразно провести побольше (5-10) перпендикуляров к разным дугам и считать центром точку, среднюю из всех пересечений.

Измерения на рис. 3 дают $\alpha \approx 15°$, что соответствует времени $t \approx 1$ час.

Следует оговориться, что Земля относительно звёзд (и, следовательно, звёзды относительно Земли) совершает полный оборот не за те сутки, которыми мы пользуемся в повседневной жизни (они называются средними солнечными), а за звёздные сутки. Последние приблизительно на 4 минуты короче средних солнечных. Звёздные и солнечные сутки были бы равны друг другу только в том случае, если бы видимое с Земли положение Солнца среди звёзд оставалось неизменным. Однако поскольку Земля обходит за год вокруг Солнца (против часовой стрелки, если смотреть из северного полушария), то и Солнце кажется нам перемещающимся среди звёзд (тоже против часовой стрелки). За 365 суток оно совершает полный круг – 360°. Значит, сутки, измеренные по Солнцу (от одного полудня до другого – от одного прохождения Солнца через ваш меридиан до другого), на $^1/_{365}$ часть (на 4 минуты) больше суток, измеренных по какой-либо звезде. Следовательно, звезда на снимке зарисует полную окружность за 23 часа 56 минут по обычным часам. Вызываемая этим обстоятельством неточность меньше, чем та, которую вы допустили при построении перпендикуляров, и поэтому её можно не принимать во внимание.

Чтобы исчерпать вопрос полностью (почти), заметим ещё, что поскольку Земля движется вокруг Солнца не по кругу, а по эллипсу и орбитальная скорость её непостоянна (в перигелии больше, в афелии меньше[1]), то и Солнце кажется нам движущимся среди звёзд неравномерно, отчего одни солнечные сутки не равны другим (июльские солнечные сутки короче январских приблизительно на 50 секунд). Другой причиной неравномерности движения Земли по орбите является наличие у Земли массивного спутника – Луны. По эллиптической орбите вокруг Солнца движется не центр Земли, а центр масс системы Земля – Луна, сама же Земля обращается вокруг общего центра масс, копируя движение Луны в масштабе 1:81 (соотношение масс) и внося в видимое движение Солнца небольшие колебания с месячным периодом. О влиянии других планет на движение Земли мы только упоминаем.

В повседневной жизни пользуются не просто солнечными сутками, которые, как мы видели, несколько непостоянны, а средними солнечными сутками.

Что касается созвездий, попавших на снимок, то для опознавания их, очевидно, надо сначала установить их конфигурацию. Для этого можно воспользоваться лю-

[1] Перигелий – точка орбиты планеты, ближайшая к Солнцу (по-гречески Гелиос – Солнце); не путать с перигеем – точкой орбиты спутника Земли, ближайшей к Земле (Гео – Земля); аналогичная точка орбиты спутника Марса называется периареем (Арес – Марс). Афелий – точка орбиты планеты, наиболее удалённая от Солнца; апогей – то же для спутника Земли.

быми точками каждой из дуг, относящимися, однако, к одному и тому же моменту времени. Можно использовать начала или концы дуг. На фото изображены частично созвездия Дракона, Большой и Малой Медведиц. Кружок, крестик и стрелки будут использованы в задачах «Звёзды позируют перед фотоаппаратом» и «Разоблачим автора!».

7. Окна, смотрящие не туда

А

Рядом с Северным полюсом на льдине стоит квадратный домик 5×5 м². Центр домика отстоит от полюса в данный момент на 10 м. В центре каждой из четырёх стен домика имеется по окну: одно смотрит сейчас точно на север, другое – на юг. Куда смотрят третье и четвёртое?

Б

Вовсе не на запад и не на восток, как многие думают.

В

Во всех частях земного шара имеются свои, даже иногда очень любопытные, другие части.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 109

Направления на восток и запад – это направления вдоль параллелей, на север и юг – вдоль меридианов. Дом стоит настолько близко к полюсу, что параллель, проходящая через его центр, успевает заметно искривиться, пока дойдёт от центра к «восточной» и «западной» стенам дома (рис. 4).

Рис. 4

Если меридиан NS_0, проходящий через центр дома A, считать московским, то меридиан, проходящий через центр «восточной» стены C, отличается от московского на $\alpha \approx 14°$, так как

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AC}{NA} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25\,.$$

Направление CO точного востока для точки C перпендикулярно к этому меридиану и, следовательно, составляет угол $90° - 14° = 76°$ с плоскостью окна. «Восточное» окно смотрит по направлению CB, т.е. на 14° южнее востока. Это направление является скорее востоко-юго-востоком, чем просто востоком. Аналогично «западное» окно смотрит на 14° южнее запада.

Интересно, что если центр дома стоит на московском меридиане (NS_0), то человек, совершивший по комнате путь от «западной» стены до «восточной», может совершенно законно утверждать, что он побывал западнее Минска (меридиан NS_1) и восточнее Куйбышева (NS_2). Ещё интереснее сле-

дующий факт. Хотя «восточная» стена плоская, тем не менее различные её точки смотрят в разные стороны света. Чтобы в этом убедиться, достаточно провести меридианы NF и NH через углы дома F и H и определить углы, под которыми плоскости меридианов пересекаются с плоскостью стены в точках F и H. Более того, если продолжить стену весьма далеко в обе стороны, то обнаружится, например, что точка K стены смотрит на юг, L – на юго-запад, а очень далёкие точки M и P (если, например, MK и KP на порядок больше NA) смотрят почти точно на запад и восток соответственно.

Каков же должен быть домик, чтобы все точки его северной стены смотрели действительно на север, восточной – на восток и т.д.? Две стены такого домика должны идти строго по параллелям, две – строго по меридианам. План такого домика показан жирной линией на рис. 4. По форме он напоминает трапецию, причём западная и восточная стены являются плоскими, северная вогнута внутрь дома, а южная – выпуклая.

8. Тень в ясный день

А

С помощью компаса туристы определили, что тени от вертикальных предметов в данный момент направлены точно на запад. Через сколько часов эти тени будут направлены точно на восток?

Б

– Ну, ясно, через 12 часов. Земля вращается вокруг своей оси равномерно, значит, и кажущееся суточное движение Солнца по небу тоже равномерно. За 24 часа Солнце и тени поворачиваются на 360°, на 180° они повернутся за 12 часов.

А как факты? Проверьте-ка на досуге, и вы увидите, что тень поворачивается с запада на восток за время, существенно меньшее двенадцати часов. Только делайте опыт летом; зимой ведь Солнце ни на западе, ни на востоке увидеть нельзя.

В

Своё суточное движение по небосводу Солнце действительно совершает равномерно (второстепенными, очень малыми неравномерностями можно пренебречь). Если бы при этом оно двигалось параллельно горизонту, то и тени поворачивались бы равномерно. Такая ситуация возможна только на полюсе. Там тени поворачиваются на 180° действительно за 12 часов, хотя, конечно, понятия востока и запада там теряют смысл. На любой же другой широте суточный путь Солнца по небу не параллелен горизонту. Чтобы сразу стало ясно, к чему это приводит, рассмотрим другую крайность – экватор. Там в день равноденствия Солнце восходит на востоке, идёт к зениту и затем спускается от него к западу (без учёта результатов задачи «Солнце зайдёт не там»). Пока оно идёт к зениту, тени направлены на запад. Но как только оно перевалило через зенит – тени уже смотрят на восток. Теоретически они переходят с запада на восток мгновенно, т.е. вовсе не за 12 часов.

Рассмотрим теперь поведение Солнца в наших широтах. На рис. 5 показан путь Солнца на небе в летний день. Здесь плоскость $NOSW$ – плоскость горизонта с поме-

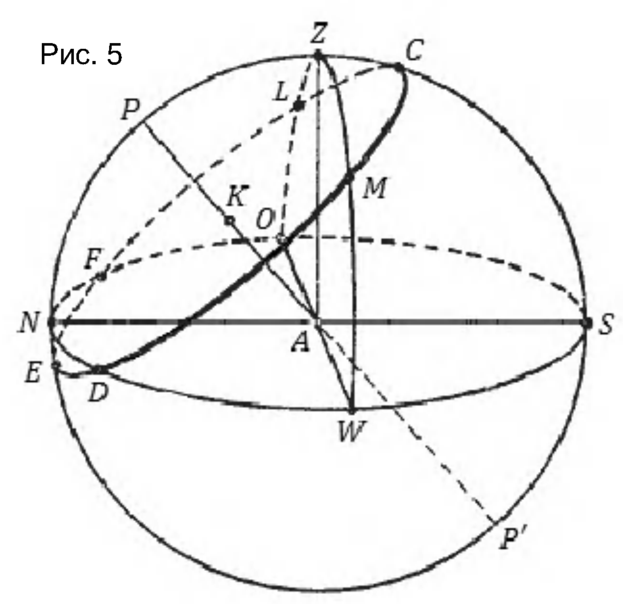


Рис. 5

ченными на ней севером, востоком, югом и западом. Плоскость $NPZSA$ – плоскость меридиана, проходящая через наблюдателя A, полюс мира P (вблизи Полярной звезды) и зенит Z. Плоскость $OZWA$, проходящая через восток, запад и зенит, делит небосвод на северную и южную половины. Плоскость $EFLCMD$, перпендикулярная к оси мира AP, – плоскость, в которой Солнце сегодня совершает своё суточное движение. Летом она пересекает ось мира в точке K, между северным полюсом мира P и наблюдателем A, благодаря чему точка восхода F оказывается севернее востока O, а точка захода D – севернее запада W (зимой эта плоскость пересекала бы ось мира между южным полюсом мира P' и наблюдателем). Тень будет направлена на запад в момент, когда Солнце переходит из северной половины небосвода в южную (точка L), а на восток – в момент обратного перехода (точка M). Из рисунка видно, что длина дуги LCM значительно меньше длины дуги $MDEFL$. Поскольку же Солнце по этой окружности движется равномерно, то время пребывания его в южной половине небосвода (дуга LCM) значительно меньше половины суток. Поэтому тень с запада на восток поворачивается менее чем за 12 часов. В Ленинграде летом это время составляет около 10 часов. В более южных районах полюс мира P виден ещё ближе к горизонту, путь Солнца по небу пересекается с горизонтом ещё круче, точка C верхней кульминации Солнца ещё ближе к зениту, время пребывания Солнца в южной половине небосвода ещё меньше. В частности, на Северном тропике (широта $+23{,}5°$) Солнце в день летнего солнцестояния вообще не заходит в южную половину небосвода: точка C совпадает с зенитом.

Туристам, не имеющим компаса, следует помнить о непостоянстве угловой скорости тени. Полезно также знать, что если расположить карандаш параллельно земной оси (т.е. наклонить его к северу под углом к горизонту, равным широте места) и затем перпендикулярно к карандашу приложить книгу (она при этом окажется в плоскости небесного экватора), то тень карандаша по книге будет перемещаться равномерно в любое время суток и года. Такое устройство может служить солнечными часами с равномерным суточным ходом.

Интересно, что длина тени карандаша не будет зависеть от времени суток, а только от времени года, причём летом карандаш пришлось бы укрепить над книгой, а зимой – под ней.

9. Луна в зените

А

Когда угловой диаметр Луны больше: когда она находится вблизи зенита или вблизи горизонта?

Б

Вообще Луна у горизонта выглядит более крупной, чем на большой высоте. Но мы знаем, что это оптический обман. Ведь Луна и в зените, и на горизонте одна и та же. Более того, в тот момент, когда мы видим её большой на горизонте, где-то кто-то другой видит её маленькой в зените. Не может же она одновременно быть и большой, и маленькой.

Таков ответ большинства читателей, и в нём всё логично, кроме последней фразы. По мнению автора, угловые размеры Луны у горизонта в действительности меньше, чем у зенита. А как думаете вы?

В

Угловые размеры Луны определяются её линейными размерами и расстоянием до наблюдателя. Пусть в данный момент расстояние между центрами Земли и Луны 380 000 км (в силу эллиптичности орбиты Луны это расстояние меняется в пределах между 363 300 и 405 500 км). Тогда от наблюдателя A (рис. 6), видящего Луну у самого горизонта, расстояние до Луны тоже равно приблизительно 380 000 км ($AO_1 \approx OO_1$). Однако наблюдатель B, видящий Луну в зените, находится ближе к ней приблизительно на величину радиуса земного шара $R \approx 6380$ км:

$$BO_1 = OO_1 - OB = 380\,000 - 6\,380 = 373\,620 \text{ км}.$$

Следовательно, угловые размеры Луны для наблюдателя B больше, чем для наблюдателя A ($\alpha_1 > \alpha_2$), приблизительно во столько раз, во сколько BO_1 меньше AO_1, т.е. на 1,7%.

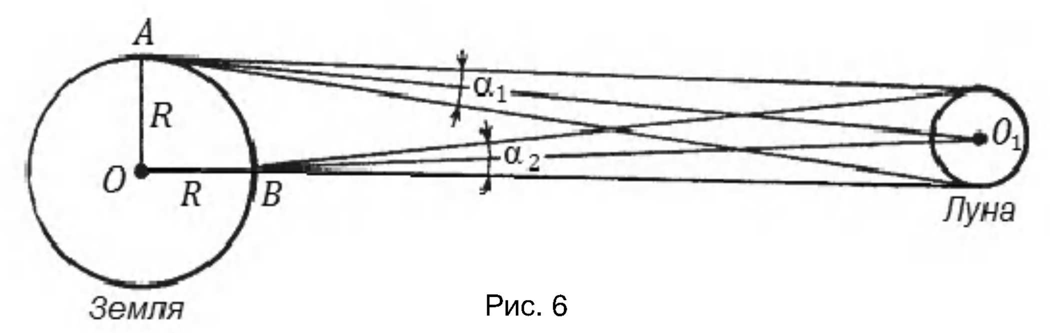


Рис. 6

Разумеется, все эти расчёты верны лишь в пределах одного дня. Эллиптичность орбиты Луны может привести к тому, что для одного и того же наблюдателя Луна в зените сегодня будет меньше Луны у горизонта две недели назад. Однако за время перехода Луны от горизонта к зениту (порядка четверти суток) расстояние Земля – Луна меняется меньше, чем на радиус Земли.

Отметим, что в наших широтах увидеть Луну в зените нельзя. Солнце в зените может увидеть наблюдатель в широтах $\pm 23{,}5°$ (угол наклона плоскости эклиптики к плоскости экватора). Поскольку плоскость орбиты Луны наклонена к плоскости эклиптики приблизительно на 5°, то Луну в зените можно увидеть в широтах $\pm 28{,}5°$.

На широте Ленинграда Луна иногда поднимается на 58,5° над горизонтом. Этого вполне достаточно для проявления как субъективного эффекта уменьшения диаметра Луны с высотой, так и объективного обратного эффекта.

Рефракция, приводящая к заметному сжатию вертикального диаметра Луны, находящейся очень близко к горизонту, дополнительно усиливает эффект, рассмотренный в задаче.

10. На собаках к Альдебарану

А

На Земле Франца-Иосифа почту с одного острова на другой доставляли на аэросанях. Но вот однажды в момент отправки обнаружилось, что аэросани неисправны и выйти в рейс не могут.

– Придётся ехать на собаках. Где каюр?

– Я здесь, только я не знаю дороги. Как туда добраться?

– Очень просто и даже романтично: берёшь на прицел вон ту звезду – Альдебаран – и мчишься на неё. Полная иллюзия, что ты в кабине космического корабля и что твоя цель – эта звезда. Жаль только, что рейс быстро кончается: через полчаса ты уже на месте.

– Ну, мне этот способ вроде не подойдёт. У твоих аэросаней, как и у космического корабля, лошадиные силы, а у моих только собачьи.

– Какая разница?

– Существенная: я не попаду на место назначения.

А какая всё-таки разница?

Б

Как нетрудно сообразить, разница в том, что собачьи силы меньше лошадиных и скорость собачьей упряжки явно меньше (скажем, для конкретности, в 10 раз) скорости аэросаней. Однако если подсказать ещё хоть слово, то вам в этой задаче нечего будет делать самим.

В

– Мы иностранцы, неопытные путешественники! Давно уже, при выезде из нашей родной Гишпании, мы потеряли компас и потому нечаянно заехали на север.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Любовь и Силин» (драма)

Вращение Земли вокруг своей оси приводит к кажущемуся вращению небосвода. Поэтому все звёзды также смещаются. Водитель аэросаней мог пренебречь смещением звезды: весь рейс длится полчаса, а за это время звезда смещается мало. Рейс на собаках будет длиться пять часов, в результате к концу рейса собачья упряжка, едущая на звезду, будет двигаться совсем не в том направлении, в каком она двигалась в начале рейса.

Небосвод совершает один оборот своего кажущегося вращения вокруг точки, находящейся вблизи Полярной звезды, за 24 часа (а точнее – за 23 часа 56 минут, см. задачу «А всё-таки она вертится!»). Поскольку на Земле Франца-Иосифа Полярная звезда видна рядом с зенитом (на расстоянии 9°), то можно для простоты полагать, что все звёзды движутся параллельно горизонту. За сутки звезда смещается приблизительно на 360°, за час – на 15°. Аэросани в конце рейса отклонятся на 7,5° от первоначального направления, собачья упряжка – на 75°. Очевидно, если бы рейс длился 24 часа, то собачья упряжка, совершив полный круг, прибыла бы туда же, откуда

она отправлялась (при условии, что упряжка идёт безостановочно и с постоянной скоростью; в случае остановок траектория саней получила бы изломы, тем более сильные, чем длительнее остановка). Впрочем, аэросани постигла бы та же участь, только круг, который они бы описали, имел бы радиус в десять раз больший. На рис. 7*а* показаны пути аэросаней (OA) и собачьей упряжки (OB). Там же прямой линией OE показан путь для любого вида транспорта в случае, если бы звезда оставалась неподвижной.

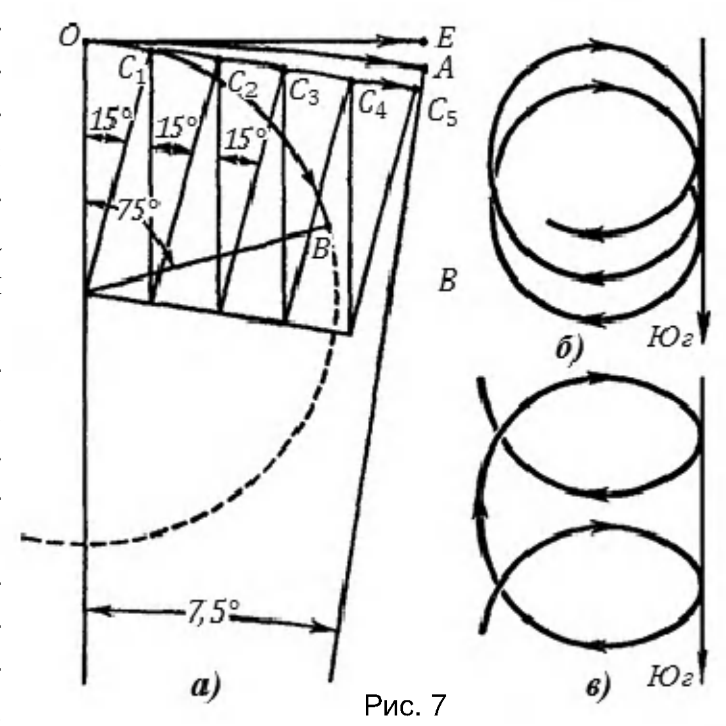


Рис. 7

Нельзя, однако, считать, что навигация по звезде непригодна для собачьей упряжки. Можно, например, периодически исправлять направление пути, забирая всё левее и левее звезды. На рисунке показан путь упряжки, состоящий из пяти дуг: упряжка начала движение на звезду (OC_1), затем через час взяла на 15° левее звезды (C_1C_2), через два часа – на 30° левее (C_2C_3) и т.д. При этом сектор 75° (рис. 7*а*) разбивается на 5 секторов по 15°, разворачиваемых 15-градусными поправками так, что путь $OC_1C_2C_3C_4C_5$ оказывается почти прямым. Ещё точнее был бы путь упряжки, если бы она каждые 4 минуты брала на 1° левее.

Заметим, что поскольку звёздный небосвод совершает оборот не за 24 часа, а за 23 часа 56 минут, то пользоваться данной звездой по одним и тем же правилам ежедневно можно только при условии, что вы выезжаете каждый раз на 4 минуты раньше, чем вчера. Водитель аэросаней, по-видимому, пользовался звездой всего лишь несколько дней подряд и поэтому не успел заметить этого обстоятельства.

Интересно отметить, что в более низких широтах пользоваться звездой труднее. Там Полярная звезда дальше от зенита, суточный путь звёзд по небу более наклонный, поэтому направление на выбранную звезду в горизонтальной плоскости меняется в течение суток неравномерно (точно так же, как направление тени в задаче «Тень в ясный день»): быстрее, когда звезда находится в южной половине неба, и медленнее – в северной. Поэтому там 24-часовой путь саней заметно отличался бы от кругового: кривизна пути была бы максимальной, когда звезда находится на юге, и минимальной – на севере. Сани двигались бы по винтообразной кривой (рис. 7*б* для высоких и рис. 7*в* для низких широт), описывая каждые сутки один виток и с каждым витком смещаясь к северу. При неограниченном запасе горючего (а также спортивного и научного интереса водителя) сани в конце концов добрались бы до полюса и начали бы описывать вокруг него правильные круги.

Эта задача совместно с задачами «Путешествие на северо-восток», «Утро на полюсе», «С календарём вокруг полюса» и «Окна, смотрящие не туда» позволяет сделать решительный вывод, что полюс является заколдованным местом планеты.

11. Разногласия на меридиане

А

Витебск и Ленинград – на одном меридиане, Пулковском, поэтому самый тёмный момент ночи в этих городах наступает одновременно – будем для простоты считать, что ровно в час ночи по московскому времени. А когда он наступит для пассажира, едущего июньской ночью из Витебска в Ленинград? А для пассажира, едущего обратно?

Будем считать, что вся дорога идёт строго по Пулковскому меридиану.

Б

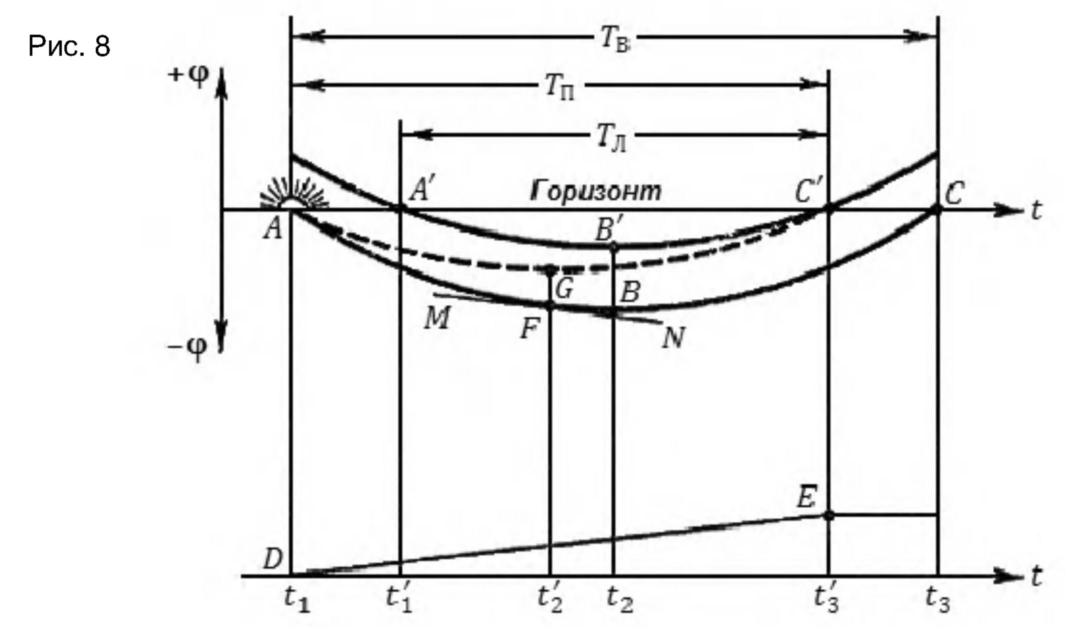
– Что за ерунда! Ну, конечно, тоже в час ночи! Ведь все станции, через которые проходит поезд, лежат тоже на Пулковском меридиане. Значит, на каждой из этих станций самое тёмное время ночи наступает в тот же момент, что и в Витебске и в Ленинграде. Какое же имеет значение, едет ли пассажир через Невель, или через Локню, или сидит всю ночь на станции Дно?

В этом весьма убедительном на первый взгляд монологе верно только то, что если пассажир всю ночь сидит на станции Дно, то он действительно самую глубокую темноту ночи встретит одновременно с жителями Ленинграда и Витебска. Иными словами, самый глубокий мрак наступит одновременно для пассажиров, *сидящих* на всех станциях, и в другое время – для *едущих*. Разобраться в этом вам будет легко, если вы вспомните, что в самое тёмное время июньской ночи в Ленинграде светлее, чем в Витебске.

В

Давайте представим, что Земля, чтобы нам легче было решать задачу, прекратила своё суточное вращение и движение вокруг Солнца как раз в момент, когда на всём Пулковском меридиане наступила полночь. Сядем в Витебске на поезд и поедем в Ленинград, а по пути будем интервьюировать пассажиров, сидящих на станциях. Все они единодушно заявят нам, что сейчас самое тёмное время суток. Между тем наши собственные наблюдения показывают, что на протяжении всей дороги рассве-

Рис. 8



тает: ведь мы едем в Ленинград – город белых ночей. Итак, у сидящих самое тёмное время суток – сейчас, а у едущих – уже позади.

Не будем более задерживать Землю, пусть она вращается. Теперь, очевидно, на глубину мрака будут влиять оба обстоятельства одновременно: и вращение Земли, и движение поезда. Глубина мрака (или, лучше, освещённость) в том месте, где вы находитесь в данный момент, определяется тем, насколько глубоко для вас Солнце находится под горизонтом. На рис. 8 кривая $AFBC$ показывает поведение Солнца ночью под горизонтом AC для Витебска. Солнце закатилось в точке A в момент t_1; самое тёмное время ночи t_2 соответствует самому глубокому положению B Солнца под горизонтом; взойдёт Солнце в момент t_3 в точке C. Кривая $A'B'C'$ показывает поведение Солнца в Ленинграде. Солнце там заходит позже ($t_1' > t_1$) и восходит раньше ($t_3' < t_3$), но самый тёмный момент t_2 тот же, что и в Витебске. Ленинград севернее Витебска на 5°, поэтому максимальная глубина погружения Солнца под горизонт в Ленинграде на 5° (на отрезок BB') меньше[1].

Движение поезда на север вызывает постепенное уменьшение глубины Солнца под горизонтом. Если мы тронулись в путь из Витебска в момент заката t_1 ехали безостановочно и прибыли в Ленинград в момент восхода Солнца в Ленинграде t_3', то вызванная нашим движением поправка в положении Солнца описывается кривой (почти прямой) DE. Складывая ординаты кривых ABC и DE, мы получаем кривую AGC', показывающую поведение Солнца для движущегося наблюдателя. Теперь момент t_2 – не самый тёмный: хотя кривая ABC в точке B имеет минимум и идёт горизонтально, но нарастающая поправка DE, налагаясь на горизонтальный участок кривой ABC, приводит к нарастанию результирующей кривой AGC' в окрестностях момента t_2. Это значит, что в момент t_2 для движущегося наблюдателя ночь светлеет. Самое тёмное время для него было раньше, в момент t_2', соответствующий минимуму кривой AGC'. В минимуме кривая AGC' идёт горизонтально. Это значит, что здесь снижение Солнца, вызванное вращением Земли, компенсируется подъёмом Солнца, вызванным движением на север. Таким образом, момент минимума t_2' можно найти как момент, когда наклон кривой ABC равен наклону кривой DE по величине и противоположен ему по направлению. Касательная MN к кривой $AFBC$ в точке F (момент t_2') имеет именно такой наклон.

Чем быстрее движется поезд, тем круче идёт кривая поправок DE, тем левее на кривой ABC находится точка, в которой крутизна кривой равна по величине и обратна по знаку крутизне кривой поправок, т.е. тем раньше наступит самое тёмное время. Рассчитаем хотя бы приблизительно, когда оно наступит, приняв за исходные следующие округлённые данные:

для Ленинграда: $t_1' = 22$ ч 00 мин, $t_2 = 01$ ч 00 мин, $t_3' = 04$ ч 00 мин;

для Витебска: $t_1 = 21$ ч 30 мин, $t_2 = 01$ ч 00 мин, $t_3 = 04$ ч 30 мин.

Как видно из рис. 8, в Ленинграде ночь длится $T_{Л} = t_3' - t_1' = 6$ ч 00 мин, в Витебске – $T_{В} = t_3 - t_1 = 7$ ч 00 мин. Ночь для пассажиров поезда, вышедшего из Витебска в момент заката t_1 и прибывшего в Ленинград в момент восхода t_3', начина-

[1] Здесь не учитывается, что на «видимое» положение Солнца оказывает влияние атмосферная рефракция даже в случае, когда светило находится под горизонтом. Это нельзя оценить непосредственно, так как Солнце не видно, но можно сделать косвенно – по яркости зари, вычисленной для отсутствия рефракции и измеренной при наличии последней.

ется вместе с витебской ночью и кончается вместе с ленинградской. Она оказывается сдвинутой влево на графике и имеет продолжительность $T_{\Pi} = t_3' - t_1 = 6$ ч 30 мин. Середина этой «поездной» ночи сдвинута на опережение на 15 минут относительно середины «станционных» ночей. Для пассажиров, едущих из Ленинграда в Витебск, кривая поправок будет иметь противоположный наклон, отчего середина «поездной» ночи сдвинется на запоздание.

Надеюсь, однако, никому из читателей не пришла в голову мысль, что пассажиру поезда Витебск – Ленинград надо перевести в какую-либо сторону стрелки часов!

12. На стадионе стемнело

А

Москвичи смотрят по телевидению футбольный матч из Бухареста. В Москве ещё светит Солнце, и поэтому телеболельщики сильно удивились, когда комментатор пожаловался на то, что на стадионе уже стемнело. В самом деле, ведь Бухарест намного западнее Москвы, и Солнце должно заходить там позже. Вам предлагается разобраться в этом вопросе.

Б

Если бы Бухарест был только западнее Москвы, то, действительно, ситуация была бы очень странной. Но он, кроме того, ещё значительно южнее Москвы. Поэтому летом бухарестский день значительно короче московского, а зимою значительно длиннее. Зимою, очевидно, и то, что Бухарест западнее, и то, что там день длиннее, приводит к запаздыванию момента захода Солнца. Значит, обсуждаемый матч происходит не зимой. Летом же, когда бухарестский день короче московского, два фактора должны действовать на момент захода Солнца в Бухаресте противоположным образом. Какой из них преобладает, вы можете определить по данным приведённой таблицы.

Город	Долгота	Широта	Продолжительность самого длинного дня
Москва	37°	56°	17 ч 30 мин
Бухарест	26°	44°	15 ч 25 мин

Продолжительность дня в таблице соответствует летнему солнцестоянию (21 июня) и дана с учетом атмосферной рефракции.

В

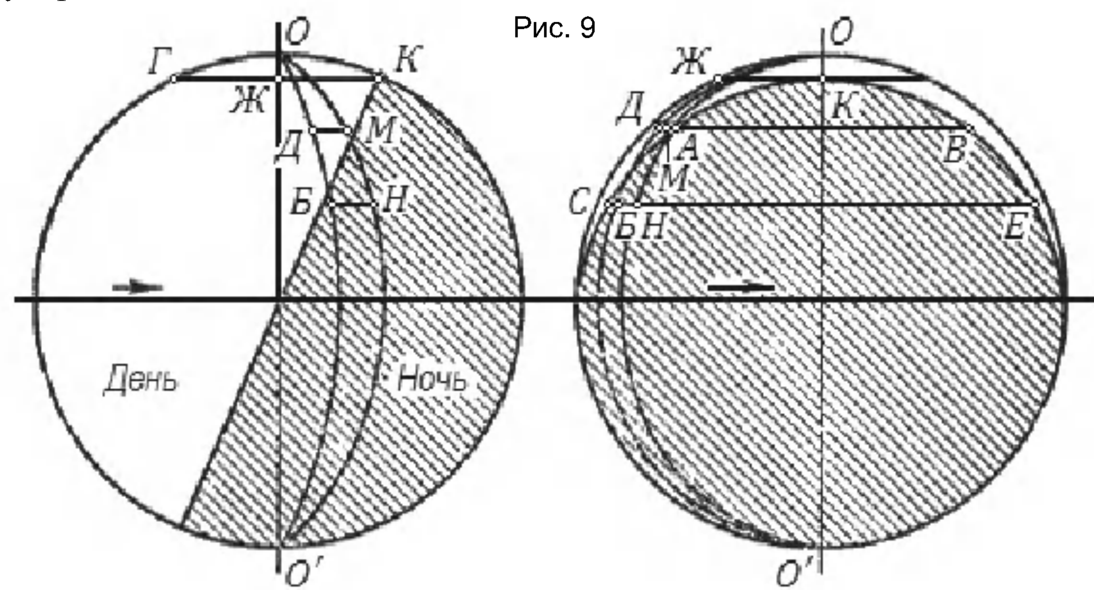
Если бы Бухарест не был южнее, а был только западнее Москвы (тогда бы он назывался Даугавпилсом), то Солнце в любой день года заходило бы в нём позже, чем в Москве, на одну и ту же величину. Эту величину легко вычислить. За сутки Земля поворачивается на $360°$, следовательно, на $1°$ она поворачивается за 4 минуты. Даугавпилс (и Бухарест) на $37° - 26° = 11°$ западнее Москвы, что даёт запаздывание заката на 44 минуты.

Бухарест находится на одной долготе с Даугавпилсом, поэтому полдень в обоих городах наступает одновременно. Восход и заход Солнца 21 июня симметричны от-

носительно полудня. Поскольку в Бухаресте 21 июня день на 2 часа 05 минут короче, чем в Москве (и Даугавпилсе), то Солнце там восходит на 1 час 2,5 минуты позже, чем в Даугавпилсе, и заходит на 1 час 2,5 минуты раньше. Итак, Солнце в Бухаресте заходит раньше, чем в Даугавпилсе, на 62,5 минуты, а в Москве – на 44 минуты. Значит, в Бухаресте Солнце заходит на $62{,}5 - 44 = 18{,}5$ минуты раньше, чем в Москве. Если учесть, что в южных широтах Солнце уходит за горизонт по довольно крутой траектории, то за 18,5 минуты после заката на стадионе действительно заметно стемнеет.

Итак, если транслируемый матч происходит около 21 июня, то болельщики напрасно удивляются жалобе комментатора.

Аналогичный расчёт можно было бы провести, заменив Даугавпилс Новороссийском – городом, находящимся на одном меридиане с Москвой и на одной параллели с Бухарестом.



На рис. 9 для наглядности показан в двух проекциях земной шар и положение границы дня и ночи 21 июня в момент, когда в Бухаресте Солнце уже закатилось, а в Москве оно ещё находится на небе. В северном полушарии ночь достигает только Северного Полярного круга *ГЖК*, выше которого сейчас царит полярный день. Точки *М*, *Д*, *Б* и *Н* означают соответственно Москву, Даугавпилс, Бухарест и Новороссийск. Меридиан *ОДБО′* – меридиан Даугавпилса и Бухареста, *ОМНО′* – Москвы и Новороссийска. На второй проекции отрезком *АВ* параллели Москвы показана продолжительность московской ночи, отрезком *СЕ* – продолжительность бухарестской ночи.

13. Под куполом озера

А

Спокойная гладь озера кажется плоскостью. Но вы прекрасно знаете, что эта поверхность куполообразна: ведь если бы озеро занимало всю поверхность земного шара, то поверхность озера и была бы поверхностью шара. Перед вами два круглых озера: одно диаметром 1 км, второе – 10 км. Во сколько раз высота купола второго озера больше высоты купола первого?

Б

Обычно с ходу отвечают: «Приблизительно в 10 раз». А теперь проделайте точные вычисления, и вы увидите, что не в 10, а в 100 раз!

В

Из рис. 10 следует, что высоту купола можно определить следующим соотношением

$$h = CD = OC - OD = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

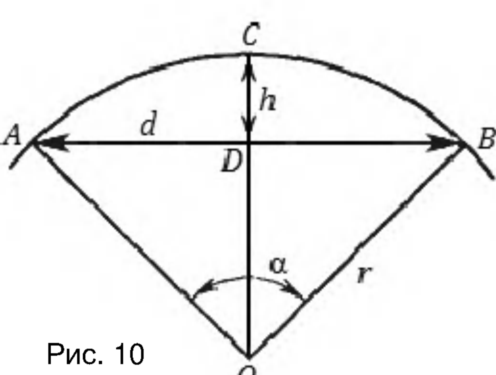


Рис. 10

где r – радиус земного шара (6 380 км), α – угол, под которым виден диаметр озера из центра Земли. Однако по этой формуле вычислять крайне неудобно: ведь угол α очень мал, косинус оказывается очень близким к единице, и, чтобы получить h с точностью хотя бы до двух знаков, необходимо определить этот косинус с точностью до десятого знака. Поэтому лучше формулу несколько преобразовать.

Вводя новое обозначение

$$x = \alpha/4$$

и используя известную формулу

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

имеем

$$h = r\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = r(1 - \cos 2x) = 2r\sin^2 x = 2r\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Эта формула удобнее первой: для определения h с точностью до двух знаков требуется знать синус также с точностью до двух знаков.

Найдём угол α. Поскольку длине экватора, равной 40 000 км, соответствует угол $\alpha = 360°$, то диаметру озера $d = 1$ км соответствует угол $\alpha_1 = 0{,}009°$, у 10-километрового же озера $\alpha_{10} = 0{,}09°$. Для таких малых углов синус угла с высокой степенью точности равен самому углу, выраженному в радианах:

$$\sin\frac{\alpha}{4} \approx \frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно, формулу для вычисления h можно упростить:

$$h \approx 2r\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 = \frac{r\alpha^2}{8}.$$

Написав эту формулу для обоих озёр,

$$h_1 = \frac{r\alpha_1^2}{8}, \quad h_{10} = \frac{r\alpha_{10}^2}{8},$$

и разделив почленно одно равенство на другое, получаем

$$\frac{h_1}{h_{10}} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_{10}^2}.$$

Отсюда немедленно следует, что высота купола второго озера больше, чем первого, не в 10, а в 100 раз: поскольку $\alpha_{10} = 10\alpha_1$, то $h_{10} = 100h_1$.

Интересно узнать, какова величина h количественно.

Для первого озера

$$\alpha_1 = \frac{0{,}009}{360} 2\pi = 0{,}000157 \text{ рад}.$$

Высота купола

$$h_1 = \frac{r\alpha_1^2}{8} = \frac{6380000 \cdot 0{,}000157^2}{8} \approx 0{,}02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

Для второго озера

$$h_{10} \approx 2 \text{ м}.$$

Не такое уж плоское это озеро! Под его куполом может свободно прогуливаться каждый из вас.

Заметим, что поскольку земной шар несколько сплюснут у полюсов, то там сплюснута и водная поверхность. В результате из двух одинаковых озёр несколько более высоким куполом обладает озеро, расположенное ближе к экватору. Однако эта разница очень мала.

Будьте осторожны: если вас спросят, а какова была бы высота купола того же 10-километрового озера, если бы оно находилось на Луне ($r = 1740$ км), то не следует делать из формулы $h = \frac{r\alpha^2}{8}$ опрометчивого вывода, что там h в $\frac{6380}{1740} = 3{,}7$ раза меньше, чем на Земле: радиус уменьшился в 3,7 раза, но зато угол α возрос во столько же раз, а поскольку α входит в формулу во второй степени, то для того же озера h на Луне была бы не меньше, а больше в 3,7 раза. Впрочем, это ощущается и без формулы: ведь кривизна поверхности меньшего шара больше, чем большего. Кстати сказать, эта большая кривизна доставит исследователям Луны немало хлопот. Для космонавта, стоящего на лунной равнине, расстояние до горизонта всего лишь 2,3 км – рукой подать. Расходясь на 4,6 км, космонавты будут полностью терять друг друга из виду, причём даже радиосвязь на ультракоротких волнах между ними будет обрываться (УКВ распространяются только в пределах прямой видимости). Короткие же волны, распространяющиеся на Земле далеко за горизонт благодаря многократным отражениям от Земли и ионосферы (верхний заряженный слой атмосферы), на Луне непригодны из-за отсутствия ионосферы. Придётся держать связь через далёкую родину – Землю или через другой ретранслятор.

14. Полярная Луна

А

На полюсе Солнце полгода находится над горизонтом, полгода же – под горизонтом. А Луна?

Б

Если у тебя спрошено будет: что полезнее, солнце или месяц? – ответствуй: месяц. Ибо солнце светит днём, когда и без того светло; а месяц – ночью.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 51

Чтобы ответить на вопрос, необходимо предварительно как следует разобраться, почему Солнце на полюсе полгода не сходит с неба и как оно при этом ведёт себя.

В

Но с другой стороны: Солнце лучше тем, что светит и греет; а месяц только светит, и то лишь в лунную ночь!

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 52

Орбита Луны и орбита Земли находятся приблизительно в одной плоскости, называемой плоскостью эклиптики. Эта плоскость наклонена под определённым углом к плоскости небесного экватора, поэтому половина эклиптики находится над экватором (т.е. в северном полушарии неба), а вторая – под экватором. На полюсе плоскость небесного экватора совпадает с плоскостью горизонта. Так как Солнце, двигаясь почти равномерно по эклиптике, описывает полный кажущийся оборот вокруг Земли за год, то оно находится над экватором (и горизонтом полюса) полгода и под экватором тоже полгода.

Луна описывает полный оборот вокруг Земли почти в той же плоскости приблизительно за месяц. Значит, на полярном небе она находится полмесяца, затем на полмесяца уходит под горизонт.

Солнце на полюсе выходит на небо в день весеннего равноденствия (точнее говоря, на три дня раньше – благодаря атмосферной рефракции). За счёт суточного вращения Земли Солнце описывает круги над горизонтом, за счёт движения по эклиптике Солнце поднимается всё выше и выше вплоть до момента летнего солнцестояния. В результате оно описывает на небе восходящую спираль в течение трёх месяцев (что даёт около девяноста витков). После этого Солнце начинает спускаться по аналогичной спирали и в день осеннего равноденствия (точнее, на три дня позже) оно спускается за горизонт.

Луна описывает похожую, но более крутую спираль, так как поднимается она около недели (около семи витков) и столько же спускается.

II. Давайте-ка, ребята, присядем перед стартом

15. Старт или финиш?

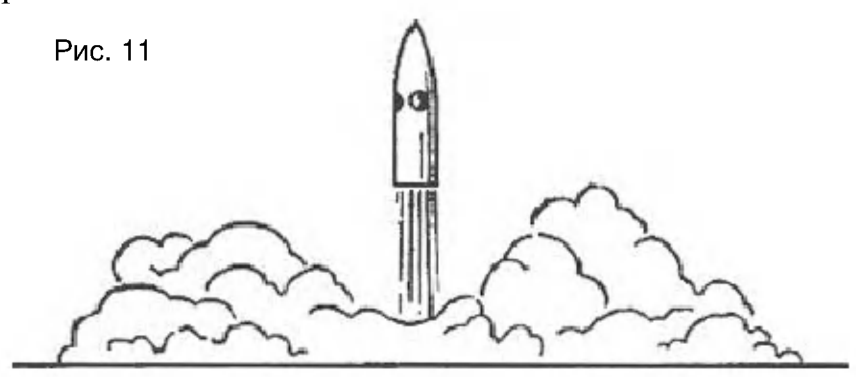
А

Взлетает или садится космический корабль, показанный на рис. 11?

Б

Большинство считает эту задачу шуткой. Дескать, автор надеется, что читатели скажут: «Поскольку реактивная струя направлена вниз, то сам корабль движется вверх и, следовательно, взлетает». Но мы знаем, что при посадке корабль также должен направить струю вниз, чтобы с помощью её реакции (противодействия) погасить свою скорость сближения с Землёй. Правда, часто посадка осуществляется с участием парашютов, без реактивной струи. Если бы на рисунке был парашют, то не было бы никаких сомнений, что это посадка. А сейчас рисунок не даёт ответа на поставленный вопрос.

Рис. 11



Конечно же, автор не строил задачу в расчёте на такой явный промах со стороны читателя. Действительно, ориентация корабля соплом к Земле, клубы пыли, поднятые реактивной струёй, – всё это одинаково характерно и для начальной стадии взлёта, и для конечной стадии приземления. Тем не менее подчёркиваем, что на рисунке имеется достаточно данных для ответа на вопрос.

В

Для того чтобы вывести спутник массой в одну тонну на орбиту, в настоящее время требуются десятки тонн топлива. В космическом корабле, который, в отличие от спутника, кроме выхода на орбиту должен совершить ещё своё космическое путешествие и затем благополучно приземлиться, соотношение между необходимым топливом и полезной массой ещё во много раз больше. Следовательно, в стартующем космическом корабле высота полезных отсеков (кабина с космонавтами, научная аппаратура) составляет ничтожно малую часть от общей высоты корабля.

Теперь взгляните на рисунок. Судя по размерам иллюминаторов, по крайней мере половину корабля занимает кабина. Следовательно, большинство ступеней ракеты уже отброшено. Двигатель корабля теперь состоит не более чем из одной ступе-

ни. Это последняя ступень. Ситуация, в которой работает последняя ступень, никак не может быть стартом. Это приземление.

Многие читатели первого издания книги считали этот ответ не единственно возможным. Они полагали, что изображённая на рис. 11 ситуация могла бы быть не финишем на Земле, а промежуточным стартом с Луны. В самом деле, чтобы покинуть Луну, нужно развить скорость около 2,5 км/с, а это по силам для одной (последней!) ступени ракеты. Для приземления же тормозной двигатель не обязателен: его задачу может выполнить тормозящее действие атмосферы. Нужно только хорошенько прицелиться с Луны, чтобы вход в атмосферу был под правильным, весьма малым, углом и, кроме того, чтобы корабль был снабжён выпускаемыми крыльями, которые позволят планировать и этим растянуть торможение на продолжительное время, сделав его безопасным.

И хотя всё эти рассуждения верны, тем не менее то, что изображено на рис. 11, не может быть стартом с Луны. И вот почему.

Клубы пыли (дыма, пара) возможны только в атмосфере. На Земле пылинка, подброшенная реактивной струёй, почти мгновенно теряет первоначальную скорость относительно воздуха, как бы велика она ни была. Дальнейшее движение её возможно только вместе с воздухом, турбулентность которого и приводит к образованию клубов пыли.

На Луне нет атмосферы. Поэтому там не может быть клубов пыли. Сама пыль может быть, а клубы – нет. В отсутствие атмосферы каждая пылинка будет, не тормозясь воздухом, описывать параболу (уточнения – в задаче «Совершали ли вы космический полёт?»). Самые быстрые пылинки и песчинки (если их скорость более 2,4 км/с) могут покинуть Луну, перейдя в ранг метеорных тел.

Кстати сказать, отсюда следует, что зевака, глазеющий с расстояния в несколько километров на старт с Луны (или прилунение), рискует получить пару пробоин в скафандре (от песчинок с массой один миллиграмм и более).

Увидеть отдельную пылинку нельзя из-за её быстрого движения. Вместо клубов пыли мы увидим что-то вроде веера лучей, состоящих из прямолинейно летящих пылинок и камешков. Этот веер мгновенно исчезает в момент выключения двигателей, так как составляющие его пылинки разлетаются.

Итак, событие происходит на планете, обладающей атмосферой и, следовательно, большой гравитацией. Это не старт с Луны. Может быть, старт с Венеры? Но для старта с Венеры ракета должна быть многоступенчатой. Поэтому единственно возможным ответом является всё-таки приземление.

16. Прыгуны на Луне

Человек раздвоён снизу, а не сверху, – для того, что две опоры надёжнее одной.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 95

А

Лучшие прыгуны на Земле преодолевают высоту 2 м и больше. Как высоко они прыгали бы на Луне, где сила тяжести в 6 раз меньше?

Б

На 12 м, говорите? Ваше заблуждение простительно, если учесть, что даже некоторые книги советуют умножить земной рекорд на шесть. Намного меньше! И дело не в том, что на Луне прыгуна будет отягощать скафандр. Попробуйте учесть, что спортсмен отталкивается от земли в вертикальном положении, а проходит над планкой – в горизонтальном, т.е. берёт высоту не столько силой, сколько хитростью.

В

Центр масс спортсмена перёд прыжком находится на высоте около 1,2 м, в момент прохода над двухметровой планкой – на высоте около 2,1 м,[1] т.е. поднимается всего лишь на 0,9 м. Затрачивая ту же энергию на Луне, прыгун поднял бы центр масс своего тела на высоту $0{,}9 \cdot 6 = 5{,}4$ м и, таким образом, прошёл бы на высоте $1{,}2 + 5{,}4 = 6{,}6$ м. Это почти вдвое ниже, чем казалось с первого взгляда. Правда, здесь не учтено, что непосредственно перед прыжком спортсмен несколько приседает и, следовательно, общий подъём центра масс во время прыжка несколько больше вычисленного. Но как первое приближение эта цифра вполне корректна.

В таком виде задача была опубликована в первом издании книги. Как и следовало ожидать, многие читатели не удовлетворились первым приближением и попытались перевести на язык цифр оговорку автора о необходимости учитывать приседание. Ответы у читателей оказались неожиданно разными, причём самый оптимистичный читатель нашёл, что высота прыжка на Луне будет порядка 100 м! Самое интересное, однако, то, что каждый из этих ответов был более или менее обоснован, причём большинство из них опиралось на метод, отличный от приведённого в задаче. Поэтому имеет смысл найти второе приближение сначала по методу автора, затем по методу читателей и, наконец, сравнить их.

Итак, учтём глубину приседания (длину толчка) Δ спортсмена. На Земле прыгун поднимает свой центр масс с высоты h_0 на высоту $h_0 + \Delta + h_З$, на Луне – на высоту $h_0 + \Delta + h_Л$. Предполагая для простоты равные затраты энергии, мы получаем равенство приращений потенциальных энергий в наивысшей точке траектории прыжка:

$$mg_З(h_З + \Delta) = mg_Л(h_Л + \Delta)\,,$$

где $g_З$ и $g_Л$ – ускорения свободного падения на Земле и Луне.

Учитывая, что $g_З = 6g_Л$, и решая это уравнение относительно $h_Л$, получаем подъём центра масс:

$$h_Л = 6h_З + 5\Delta\,, \qquad \textbf{(1)}$$

прибавив к которому начальную (в приседании) высоту h_0 и длину толчка Δ, мы узна́ем значение лунного рекорда.

Глубина приседания перед прыжком у рекордсменов, по данным Ленинградского института физкультуры им. Лесгафта, колеблется около 35 см (для спортсменов, имеющих рост 180-185 см). Для людей среднего роста (170 см) она будет порядка $\Delta = 0{,}3$ м. Если, как и раньше, $h_З = 0{,}9$ м, то

$$h_Л = 6 \cdot 0{,}9 + 5 \cdot 0{,}3 = 6{,}9 \text{ м}\,,$$

[1] В принципе, если сильно изогнуться, то можно пройти над планкой так, что центр масс всё время будет даже ниже планки.

а рекорд

$$h_0 + \Delta + h_Л = 0{,}9 + 0{,}3 + 6{,}9 = 8{,}1 \text{ м} .$$

Теперь учтём приседание методом, предложенным читателями. Основная нить рассуждений у многих выглядела так. Чтобы человек прыгнул, нужно, чтобы его ноги развили силу, бо́льшую чем вес тела. Если сила тяжести на Земле равна P, а спортсмен развивает силу $1{,}5P$, то $1P$ уйдёт на компенсацию силы тяжести, а $0{,}5P$ – на придание скорости телу. Однако тот же человек на Луне весит $\frac{1}{6}P$, следовательно, на компенсацию веса потребуется меньше, а на придание скорости останется больше, а именно $1{,}33P$. Это в 2,67 раза больше $0{,}5P$. Следовательно, и скорость отрыва от Луны будет в 2,67 раза больше. Высота подъёма h связана со скоростью взлёта v и ускорением свободного падения g формулой

$$h = \frac{v^2}{2g} .$$

Написав эту формулу для Земли и Луны и разделив одну на другую, получим

$$\frac{h_Л}{h_З} = \frac{v_Л^2}{v_З^2} \cdot \frac{g_З}{g_Л} = 2{,}67^2 \cdot 6 \approx 46 .$$

На Луне спортсмен прыгнет не в 6, а в 46 раз выше, чем на Земле. На сорок с лишним метров!

Давайте, однако, от ориентировочных расчётов перейдём к точным. Будем при этом следовать методике читателя С.Л. Полонского (Рыбинск), решение которого оказалось самым точным из присланных.

Найдём силу ног прыгуна массой $m = 60$ кг, преодолевающего на Земле высоту 2 м, т.е. поднимающего во время полёта центр тяжести на $h_З = 0{,}9$ м за счёт скорости, приобретённой на пути $\Delta = 0{,}3$ м.

Скорость его отрыва от Земли

$$v_З = \sqrt{2 g_З h_З} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}9} = 4{,}2 \text{ м/с} . \qquad \textbf{(2)}$$

Ускорение в толчке

$$a_З = \frac{v_З^2}{2\Delta} = \frac{g_З h_З}{\Delta} = \frac{9{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}3} = 29{,}4 \text{ м/с}^2 . \qquad \textbf{(3)}$$

Мы замечаем, что можно было бы скорость и не вычислять, а просто найти $a_З$ из пропорции

$$\frac{a_З}{g_З} = \frac{h_З}{\Delta} , \qquad \textbf{(4)}$$

но знание скорости нам пригодится.

Сила, вызвавшая ускорение $a_З$,

$$Q_З = m a_З = 60 \cdot 29{,}4 = 1770 \text{ Н} \approx 180 \text{ кгс} . \qquad \textbf{(5)}$$

Полную силу ног P_0 найдём, прибавив к $Q_З$ земной вес прыгуна ($P_З = 60$ кгс):

$$P_0 = P_З + Q_З = 60 + 180 = 240 \text{ кгс} . \qquad \textbf{(6)}$$

Теперь можно приступить к расчётам прыжка на Луне, исходя из гипотезы, что сила ног у человека не уменьшилась от переноса его с Земли на Луну. Сила толчка на Луне, где вес прыгуна в шесть раз меньше ($P_Л = 10$ кгс),

$$Q_Л = P_0 - P_Л = 240 - 10 = 230 \text{ кгс} \approx 2240 \text{ Н} . \qquad \textbf{(7)}$$

Ускорение в толчке (масса прыгуна по-прежнему $m = 60$ кг)

$$a_Л = \frac{Q_Л}{m} = \frac{2240}{60} = 37{,}2 \text{ м/с}^2 . \qquad \textbf{(8)}$$

Скорость отрыва прыгуна от Луны

$$v_Л = \sqrt{2a_Л\Delta} = \sqrt{2 \cdot 37{,}2 \cdot 0{,}3} = 4{,}72 \text{ м/с} . \qquad \textbf{(9)}$$

Высота подъёма на Луне

$$h_Л = \frac{v_Л^2}{2g_Л} = \frac{4{,}72^2}{2 \cdot 1{,}63} = 6{,}9 \text{ м} . \qquad \textbf{(10)}$$

Результат совпадает с тем, что мы получили с помощью формулы **(1)**. Единственное различие состоит в том, что для расчёта по первому методу достаточно одной формулы, а по второму их требуется около десятка.

Но, может быть, это случайное совпадение? Или даже умысел коварного автора, подобравшего так удачно численный пример? Чтобы не проверять бесконечное число примеров, совпадение стоит проверить в общем виде. Подставьте формулы **(3)** – **(10)** одну в другую, начиная, например, с **(10)**:

$$h_Л = \frac{v_Л^2}{2g_Л} = \frac{a_Л\Delta}{g_Л} = \frac{Q_Л\Delta}{mg_Л} = \frac{(P_0 - P_Л)\Delta}{mg_Л} = \frac{(P_З + Q_З - P_Л)\Delta}{mg_Л} =$$

$$= \frac{(mg_З + ma_З - mg_Л)\Delta}{mg_Л} = \left(\frac{g_З}{g_Л} + \frac{a_З}{g_Л} = 1\right)\Delta =$$

$$= \left(\frac{g_З}{g_Л} + \frac{g_З h_З}{g_Л\Delta} - 1\right)\Delta = \frac{g_З}{g_Л}(\Delta + h_З) - \Delta .$$

Выписывая отдельно начало и конец этой длинной цепи равенств, получаем

$$h_Л = \frac{g_З}{g_Л}(\Delta + h_З) - \Delta = 6(\Delta + h_З) - \Delta ,$$

что и даёт формулу **(1)**.

Теперь у нас есть полная уверенность, что оба метода всегда будут давать одно и то же и оба они правильны (или неправильны) одновременно. Чувствует себя спокойнее и автор: две опоры надёжнее одной, это Козьма Прутков заметил тонко.

Но почему же ориентировочные расчёты давали такой экзотический результат? Потому что там есть две ошибки. Первая: сила ног взята наугад равной $1{,}5P$, в то время как она у берущего высоту 2 м оказывается равной $4P$. Вторая: если сила в n раз больше, то это не значит, что и скорость отрыва возрастёт во столько же раз. Так было бы, если бы время на разгибание ног в обоих случаях было одинаковым. Но этого нет. В обоих случаях одинаков путь разгибания Δ, а не время (ноги на Луне имеют ту же длину, что и на Земле). В результате большее ускорение будет действовать меньшее время, и скорость возрастёт не так уж сильно [сравните результаты расчёта по формулам **(9)** и **(2)**].

Ошибки весьма поучительные. Ноги прыгуна намного сильнее, чем это подсказывает интуиция. В то же время прибавка скорости намного меньше, чем подсказывает всё та же интуиция. Анализ ошибок полезен тем, что он позволяет глубже познать истину. Выстраданная истина прочнее и дороже.

В качестве дополнительных задач полезно рассмотреть, как высоко прыгнул бы на Луне кузнечик (в скафандре, разумеется), берущий на Земле забор высотой 1,5 м. Сможет ли прыгнуть на Луне тот, у кого на Земле хватает сил только на поддержание себя в положении стоя? Чего достиг бы на Луне прыгун с шестом?

И, наконец, не понадобится ли следующий раз вновь дополнять решение? Всё ли уже учтено? Нет, конечно. Не учтено ещё множество факторов. Главный из них: сила толчка не постоянна, она меняется в процессе толчка, так как при разгибании ног меняются углы между «рычагами» и «пружинами», из которых построена нога. Меняется она и чисто физиологически: сила мышцы в каждое мгновение зависит от характера команд, подводимых к ней по нерву, управление мышцей идёт по сложному закону. Кроме того, высота прыжка будет зависеть от массы скафандра и от условий внутри него. Но это всё проблемы для диссертации. Здесь их не рассмотреть. Впрочем, и мы можем подсказать кое-что диссертантам. Судя по формуле **(1)**, высота $h_Л$ рекордного прыжка на Луне зависит от глубины приседания Δ. На Земле она, разумеется, тоже зависит от неё, и многолетний опыт приводит каждого спортсмена к своему оптимальному значению Δ. Но одинаковы ли у данного спортсмена оптимальные значения Δ для Земли и Луны? Можно ли это рассчитать теоретически, так сказать, с участием одной головы? Или этот вопрос надёжнее решается экспериментально, ногами? Не это ли имел в виду Козьма Прутков, утверждая, что две опоры надёжнее одной?

17. Автор изобрёл вечный двигатель

А

Век перпетуум мобиле давно прошёл. Тем не менее, мы осмеливаемся предложить вашему вниманию ещё один его вариант. Как и полагается для добротно сделанного вечного двигателя, он работает без всяких источников энергии. Более того, чем больше он работает, тем энергичнее становится (в этом пункте мы, кажется, даже оставили позади всех прежних изобретателей!). Мы знаем, что изобретатель вечного двигателя в наше время считается невеждой [1]. Но вот вам описание двигателя, и пусть нас рассудит Ньютон.

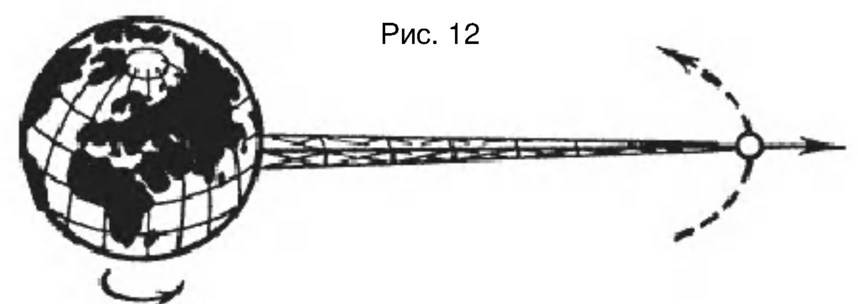


Рис. 12

На экваторе (рис. 12) установлена башня высотой в 40 000 км (в космический век перпетуум мобиле строятся с размахом!). На верх башни водружён массивный шар (сотни тонн), к которому приварена жёсткая штанга, проходящая внутри башни и одним концом достигающая земной поверхности. Как легко подсчитать, на штангу

[1] Для энтузиастов идеи вечного двигателя настоятельно рекомендую последние гла́вы интересной книги: *Ощепков П.К.* Жизнь и мечта. – М.: Московский рабочий, 1967.

(вследствие вращения башни вместе с Землёй) действует центробежная сила инерции шара, бóльшая силы земного тяготения (с увеличением высоты сила тяготения убывает, а центробежная сила с увеличением радиуса вращения возрастает; равенство достигается на высоте 35 800 км, где шар был бы в состоянии невесомости и в поддержке башни не нуждался бы, т.е. превратился бы в спутник Земли с 24-часовым периодом обращения). Поэтому шар стремится подняться ещё выше. Но выше сила тяготения ещё меньше, а центробежная сила – ещё больше. Если шар не удерживать, то он сорвётся и улетит, как срываются с «чёртова колеса» те любители острых ощущений, которые слишком далеко отодвинулись от центра вращения. Не будем удерживать шар. Пусть он удаляется от Земли и тянет за собой штангу. Будем наращивать штангу – прикреплять к ней снизу всё новые и новые отрезки по мере того, как шар поднимается всё выше. Очевидно, это можно делать без конца. Шар будет поднимать всё новые и новые грузы, т.е. выполнять работу.

Для тех, кому беспрерывное поднятие в космос всё новых и новых километров штанги покажется бесполезной работой, предлагаем более полезный вариант. Нарежьте на штанге зубцы (зубчатая рейка) и заставьте её путём зацепления вращать какую-либо грандиозную шестерню. На вал шестерни посадите электрический генератор и используйте вырабатываемую им электрическую энергию.

Ну, что вы на это скажете?

Б

Кто мешает тебе выдумать порох непромокаемый?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 133

Единственная существенная подсказка, которую здесь можно было бы сделать, это то, что перпетуум мобиле действительно невозможен. Но вы это уже знаете. Однако у вас могут появиться и другие соображения, способные помешать вам по достоинству оценить эту сногсшибательную идею. Вы можете, например, сказать, что башню и штангу высотой в 40 000 км не построить, что они рухнут под действием собственной силы тяжести. Эти соображения верны, но не имеют значения. Они означают только то, что сооружение башни надо отложить до тех времён, когда будут изобретены достаточно прочные материалы. Смотрите, «Положение об изобретениях» (пункт 35) целиком на нашей стороне: «…полезность изобретения определяется не только с точки зрения целесообразности немедленного использования…, но и возможности использования его *в будущем, после создания необходимых для этого условий*».

Мы согласны и с теми, кто возразит, что штанга длиной в 40 000 км, стремящаяся к Земле, может перетянуть шар, стремящийся вверх. Но ничто не мешает нам сделать башню высотой не 40 000, а 200 000 км. Наконец, ничто не мешает нам применять эту идею не на Земле, а на других небесных телах. Например, на астероидах потребная высота башни измеряется всего лишь километрами и вполне осуществима при современном уровне строительной техники, если учесть, что сила тяжести на астероиде во много раз меньше земной.

В

Земной шар, обращающийся в беспредельном пространстве, служит пьедесталом для всего, на нём обретающегося.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 105

Этот вечный двигатель будет работать! Только… не вечно. Центробежная сила, поднимая штангу, совершает работу за счёт кинетической энергии вращения шара вместе с башней. А шар получил эту энергию из запасов энергии вращения Земли. Эти запасы огромны, но и они когда-нибудь будут исчерпаны. Если бы действительно удалось когда-нибудь построить этот двигатель, то его эксплуатация привела бы к постепенному замедлению суточного вращения Земли. Сравните поведение Земли с поведением конькобежца-фигуриста, быстро вращающегося вокруг вертикальной оси. Если конькобежец раскинет в стороны руки, то угловая скорость его вращения немедленно уменьшится. Его общий момент количества движения[1] при этом не изменяется (если пренебречь потерями на трение коньков о лёд и на сопротивление воздуха), но бóльшая его часть сосредоточивается в наиболее удалённых от оси вращения точках рук. Увеличение момента количества движения рук приводит к уменьшению момента количества движения корпуса, отчего число оборотов конькобежца в секунду уменьшается. Стоит, однако, фигуристу вновь прижать руки к корпусу, как его угловая скорость вращения снова возрастает. Очевидно, если мы после некоторого периода эксплуатации рассмотренного выше генератора притянем штангу и шар к Земле, то скорость вращения Земли снова возрастёт. А как быть с электрической энергией, которую мы извлекли из генератора? Её придется вернуть Земле: она понадобится для того, чтобы совершить работу по преодолению центробежной силы при возвращении шара из космоса на вершину башни. Причём вернуть с процентами, так как все расходы на трение будут взысканы с экспериментатора.

18. Без руля и без ветрил

А

Вы находитесь на орбите спутника Земли, и вам предстоит приземление. Известно, чтó для этого надо сделать: развернуть корабль с помощью двигателей ориентации так, чтобы сопла тормозных двигателей были направлены вперёд по линии вашего полёта, и затем включить тормозные двигатели. И вдруг вы обнаруживаете, что двигатели ориентации вышли из строя. Как быть? Сумеете ли вы развернуть корабль без двигателей?

---

[1] Момент количества движения вращающейся материальной точки – произведение её массы на угловую скорость и квадрат радиуса вращения ($L = m\omega r^2$); момент количества движения тела равен сумме моментов количества движения всех его точек:

$$L = \omega(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots) .$$

Для вращающегося фигуриста L постоянно; при увеличении одного слагаемого (момента для рук – за счёт увеличения радиуса вращения) уменьшается другое (момент для корпуса – за счёт уменьшения угловой скорости).

Б

Можно использовать какой-нибудь маховик: вращая его вокруг некоторой оси, вы тем самым будете поворачивать корабль в противоположном направлении вокруг той же оси. Правда, масса и размеры маховика малы по сравнению с массой и размерами корабля, поэтому маховику придётся совершить довольно много оборотов, пока он развернёт корабль на нужный угол. Но где взять маховик, если вы его не захватили с собой в полёт?

В

В качестве «маховика» космонавт может использовать самого себя. Вращаясь на месте или совершая круговое путешествие по кабине (цепляясь за стенки, разумеется), он с течением времени развернёт корабль. Если это из-за невесомости неудобно, то можно сделать всё необходимое, даже не отвязываясь от кресла: достаточно, например, придать вращательное движение свободной руке. В принципе корабль можно развернуть даже простым вращением карандаша между пальцами. Правда, карандаш вертеть пришлось бы слишком долго.

Заменив для простоты расчётов корабль и карандаш пустотелыми тонкостенными цилиндрами, имеющими радиусы $R = 1$ м, $r = 0{,}4$ см и массы $M = 10^6$ г и $m = 10$ г соответственно, мы получаем на основе закона сохранения момента количества движения

$$L = \Omega M R^2 = -l = \omega m r^2 ,$$

откуда отношение угловых скоростей

$$\left|\frac{\omega}{\Omega}\right| = \frac{MR^2}{mr^2} = \frac{10^6 \cdot 10^4}{10 \cdot 0{,}4^2} \approx 6 \cdot 10^9 .$$

Из этого отношения следует, что корабль повернётся на $360°$ тогда, когда карандаш совершит 6 млрд. оборотов. И если вам некуда спешить, то, вращая карандаш без отдыха со скоростью один оборот в секунду, вы развернёте корабль на $180°$ ровно за 100 лет.

Используя вместо карандаша пустотелый цилиндр с $m = 75$ кг и $r = 25$ см, вы развернули бы корабль на $180°$ примерно за сто оборотов. Человеку той же массы, поскольку он больше похож на сплошной цилиндр, чем на пустотелый, пришлось бы совершить несколько больше оборотов, порядка двухсот.

19. Упираясь ногами в бездну

А

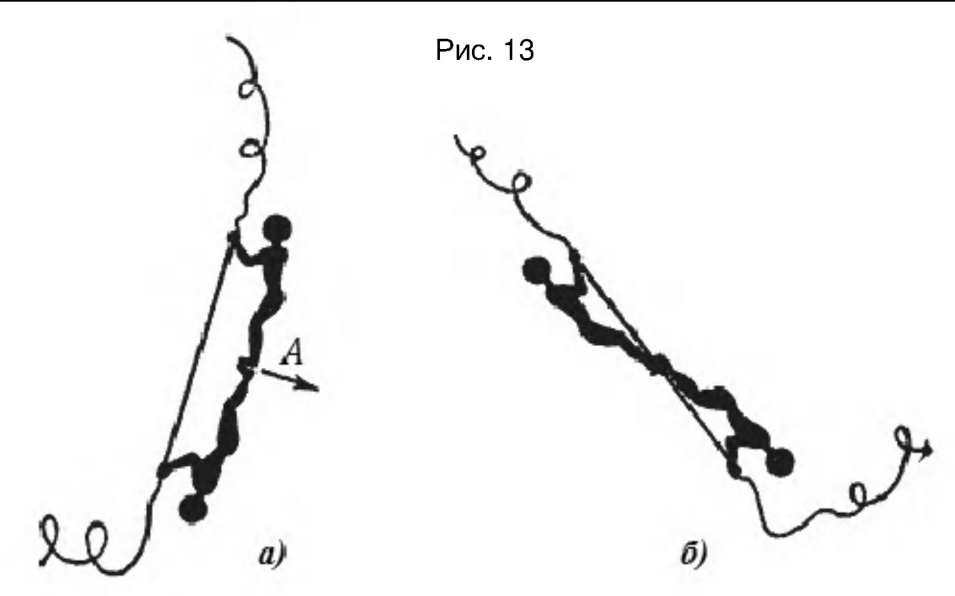
Два космонавта вне корабля растягивают трос (без двигателей). В это время третий космонавт его перерезает. Как будут двигаться после этого первые два?

Б

– Никак! Космонавты не могут растягивать трос: им не во что упереться ногами.

Отвечая так, не учитывают всех возможностей. Во-первых, если растягиваемый трос не длиннее четырёх метров, космонавты могут растянуть его, упираясь подошвами в подошвы друг другу.

Рис. 13



Правда, если они приступят к делу так, что трос окажется в стороне от площади опоры (рис. 13*а*), то их положение будет неустойчивым, и ноги уйдут от троса (по стрелке *A*). Так изгибается лук под действием натягиваемой тетивы. Для устойчивости им следует развернуться лицами в противоположные стороны (носки одного опираются на каблуки другого) и пропустить трос между ног (рис. 13*б*). Однако это не так уж интересно. Намного интереснее то, что они могут растянуть и стометровый трос, т.е. такой, при котором опереться друг на друга невозможно (разве только используя стометровую трубу, надетую на трос). Для этого они должны передвигаться вдоль троса. Как?

В

Для того чтобы трос был натянут, космонавты должны приложить к нему с двух концов силы. Потянув за трос, они приложат эти силы, но в соответствии с третьим законом Ньютона такие же силы приложит к ним трос, отчего космонавты двинутся друг к другу вдоль троса. Чтобы трос был постоянно натянут, силы эти должны быть постоянными. Создание на некоторое время постоянной или почти постоянной силы возможно: космонавты должны, перебирая в руках трос, двигаться друг другу навстречу с постоянным ускорением. Разумеется, натянутой будет только та часть троса, которая находится между космонавтами.

Некоторым неудобством (но только для рассуждений, а не для действий) является необходимость соблюдения того, чтобы центр масс каждого из космонавтов был на продолжении троса. Поскольку центр масс обычно находится в области живота, то вся затея кажется нереальной. Однако легко вынести центр масс за пределы тела: для этого достаточно подтянуть ноги под прямым углом к корпусу. В невесомости это не составляет большого труда.

Если вас не устраивает то, что трос будет натянут не вечно, а только до момента сближения космонавтов, то растягивание можно продолжить: сблизившись, космонавты должны оттолкнуться друг от друга. Теперь надо перебирать трос руками так, чтобы удаляться с замедлением. Эту процедуру можно повторять: то сближаясь с ускорением, то удаляясь с торможением, космонавты всё время будут держать трос в натянутом состоянии.

Теперь ясно, чтó будет, если трос перерезать. Если это сделать во время сближения космонавтов, то они будут продолжать сближаться, но уже не ускоренно, а

равномерно, с той скоростью, которую они имели в последний момент, когда трос ещё был целым. Если трос перерезать во время удаления, то они будут продолжать удаляться, но уже равномерно.

Строго говоря, поскольку трос обладает некоторыми пружинящими свойствами, то обе его половинки в момент перерезывания устремятся к космонавтам и, соответственно, потянут космонавтов к себе, отчего скорость сближающихся космонавтов несколько возрастёт, а удаляющихся – уменьшится.

Описанный способ растягивания не единственный. Если бы космонавты сумели привести себя и трос во вращение вокруг оси, перпендикулярной к тросу («карусель»), то трос был бы растянут центробежными силами. Для этого нужно, чтобы один или оба[1] космонавта бросили перпендикулярно к тросу (в противоположных направлениях) какие-либо грузы.

Наконец, если требуется кратковременное распрямление троса, то достаточно швырнуть оба его конца в противоположные стороны.

Есть и другие возможности. Одну из них вы можете извлечь из задачи «Гантель в космосе».

20. Дайте мне точку опоры!

А

Нашим ближайшим потомкам понадобилось исправить орбиту Земли (потомкам всё может понадобиться). Могут ли им для этой цели пригодиться современные ракеты?

Б

Усердие всё превозмогает!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 84

Исправление орбиты Земли – грандиозный проект. Поэтому не следует смущаться трудностями его осуществления: числом и мощностью ракет, необходимостью крепить их к «полезному грузу» – Земле – на мачтах, выступающих за атмосферу, и т.д. Следует только показать, осуществим ли этот проект принципиально. Как повлияет на ваши расчёты, например, то обстоятельство, что скорость истечения газов из современных химических ракет составляет величину порядка 2,5 км/с?

В

Бывает, что усердие превозмогает и рассудок.
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 27*а*

В соответствии с третьим законом Ньютона силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению. Снаряд и

[1] Опираясь на законы движения центра масс, сформулируйте условия, при которых бросание грузов приводит к чистому вращению, не вызывая поступательного движения космонавтов и троса, либо, наоборот, к чистому поступательному движению.

пушка движутся после выстрела в разные стороны. В соответствии с законом сохранения количества движения оба тела после взаимодействия движутся таким образом, что их общий центр масс продолжает вести себя так же, как он вёл себя до взаимодействия тел. Если до выстрела центр масс системы пушка–снаряд был неподвижен, то он будет неподвижен и после выстрела. Количество движения снаряда (и пороховых газов) $m_1 v_1$ равно по величине и противоположно по направлению количеству движения пушки $m_2 v_2$. Тогда

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Центр масс меньшего тела удаляется в одну сторону с большей скоростью, центр масс большего тела – в другую с меньшей скоростью. Общий центр масс остаётся неподвижным, как это следует из того, что он должен делить расстояние между двумя массами на части, обратно пропорциональные этим массам. Если пушка стреляет на ходу, то общий центр масс системы пушка–снаряд продолжает двигаться в ту же сторону и с той же скоростью, с какой он двигался до выстрела.

Представим теперь, что снаряд соединён с пушкой пружиной. Вылетев из пушки, он растягивает пружину, затрачивая на это свою кинетическую энергию. Израсходовав её полностью, снаряд остановится, после чего пружина вернёт его (а также и пушку) на старое место. Правда, если энергии снаряда достаточно, чтобы разорвать пружину, то снаряд всё-таки улетит с некоторой скоростью и не вернётся на старое место, равно как и пушка будет откатываться от старого места с некоторой остаточной скоростью.

Рассмотрим ракету, движущуюся в космосе по некоторой орбите. При включении двигателей ракета меняет свою орбиту, хотя общий центр масс системы реактивная струя–ракета продолжает двигаться по старой орбите. Если бы, однако, ракета и струя газов были связаны какой-то пружиной, то она вернула бы газы и ракету на первоначальную орбиту. Отсутствие такой пружины и позволяет ракете изменить орбиту.

Перейдём к интересующей нас задаче. Пристроим ракетные двигатели к Земле. Чтобы земная атмосфера не тормозила струю газов, установим ракеты на башнях высотой в сотни километров (после задачи «Автор изобрёл вечный двигатель» такие размеры башни уже не могут нас смутить). Пусть нам нужно приблизить Землю к Солнцу. Тогда мы должны затормозить её (см. задачу «Хочешь быстрее – тормози»). Для этого надо направить реактивную струю туда, куда движется Земля, т.е. на 90° западнее Солнца. Силой отдачи струи Земля начнёт «откатываться» назад по орбите, т.е. уменьшать свою орбитальную скорость.

Но вот в чём беда: газы струи́ и Земля связаны мощной «пружиной» – тяготением. Преодолевая силы тяготения, газы струи теряют свою кинетическую энергию. Чтобы разорвать «пружину» земного тяготения, как известно, требуется скорость 11,2 км/с. Струя газов не обладает такой скоростью: в её распоряжении всего лишь 2,5 км/с. Следовательно, поднявшись на некоторую высоту, молекулы газа вновь начнут падать на Землю (по эллиптическим траекториям, в фокусе которых находится центр масс Земли). Второй конец «пружины» – сила, с которой молекулы притягивают Землю, – заставит последнюю «падать на молекулы», т.е. вернуться на первоначальную орбиту. Чтобы не осложнять задачу, мы не учитываем давление сол-

нечных лучей на молекулы и влияние магнитного поля Земли на ионы и электроны, из которых в значительной степени состоит горячая струя.

Таким образом, пока не будут использованы ракетные топлива, обеспечивающие скорость струи выше 11,2 км/с, изменить орбиту Земли невозможно.

Попробуем, однако, быть предельно строгими. Скорость молекул струи, равная 2,5 км/с, – это только средняя скорость. Следовательно, в струе имеются и более медленные, и более быстрые молекулы. Есть и такие, скорость которых в пять раз превосходит среднюю. Они преодолеют земное тяготение и, следовательно, изменят орбиту Земли. Но таких молекул ничтожно малое количество.

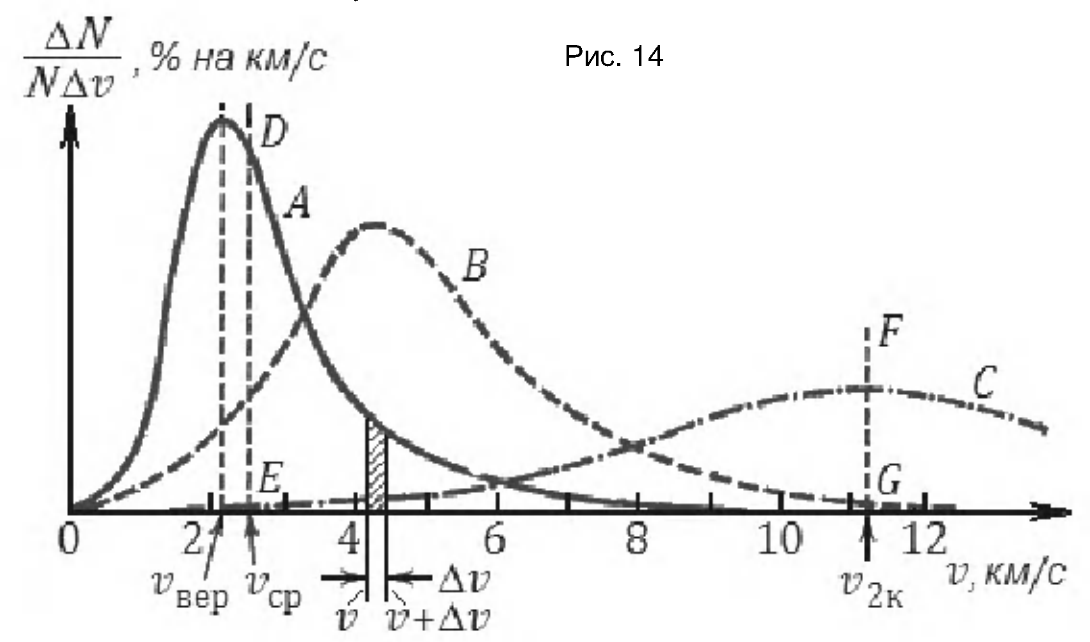


Рис. 14

На рис. 14 показано распределение молекул газа по скоростям (распределение Максвелла, которое строго верно для газа, находящегося в покое, и не совсем – для вытекающего из сопла). Кривая A отражает наш случай, когда средняя скорость молекул равна 2,5 км/с. По оси абсцисс отложена скорость молекул, по оси ординат – их относительное количество для каждого значения скорости. Если площадь между кривой и осью абсцисс принять за 100% (полное число молекул), то заштрихованная площадка показывает процент молекул, скорость которых больше некоторой v, но меньше $v + \Delta v$. Очевидно, средней скоростью $v_{\text{ср}}$ является такая, при которой площадь графика делится на две равные части: половина молекул имеет скорость меньше средней (левее прямой DE), половина – больше (правее DE). Максимум графика соответствует наиболее вероятной скорости $v_{\text{вер}}$ (эти две скорости всегда связаны соотношением $v_{\text{ср}} = 1{,}22 v_{\text{вер}}$).

Из графика видно, что кривая в области больших скоростей довольно быстро прижимается к оси абсцисс (хотя теоретически нигде с ней не сливается). Поэтому число молекул правее прямой FG, соответствующей второй космической скорости $v_{2\text{к}} = 11{,}2$ км/с, ничтожно мало́ (по графику его даже не определить, нужно считать по формуле), порядка 10^{-9}%. И даже если бы средняя скорость была вдвое больше (кривая B), то и тогда правее FG число молекул всё ещё было бы только 0,01%.

Таким образом, при $v_{\text{ср}} = 11{,}2$ км/с покидает Землю лишь одна молекула из ста миллиардов, причём скорость этой молекулы почти полностью уже растрачена на преодоление земного тяготения. Для того чтобы за счёт таких молекул изменить

сколько-нибудь заметно орбиту Земли, пришлось бы превратить в ракетное топливо почти всю планету (кстати сказать, это уже не удовлетворяет условию задачи: современные ракеты не могут использовать в качестве топлива песок и глину). Жалкие остатки нашей планеты (окружённые к тому же атмосферой из ядовитых продуктов работы двигателей), которые после этой операции пойдут по новой орбите, вряд ли можно будет продолжать называть планетой Земля.

А нельзя ли затормозить Землю не струёй ракеты, прикреплённой к Земле, а «струёй», состоящей из ракет, покидающих Землю? Ведь космические ракеты, работающие на современном топливе, способны развить скорость выше $11{,}2$ км/с. Если общий центр масс Земли и ракеты, ушедшей к Марсу, продолжает двигаться по старой орбите, то, следовательно, Земля движется по новой! Дадим залп из миллиарда ракет!

Нетрудно сообразить, что этот способ мало чем отличается от предыдущего. Ракета на современном топливе для достижения нужной скорости должна быть многоступенчатой. Все ступени (и отработанные ими газы), кроме последней, «пружиной» тяготения возвращаются на Землю. Масса же последней ступени, покидающей Землю и поэтому влияющей на орбиту Земли, составляет по-прежнему ничтожно малый процент от первоначальной массы ракеты.

Читатель П. Мелешкевич (Тульская обл.) предложил такой оригинальный способ. Построим башню, подобную уже построенной в задаче «Автор изобрёл вечный двигатель», высотой в 19 земных радиусов ($120\,000$ км). На такой высоте вторая космическая скорость $v_{2к} = 2{,}5$ км/с. Следовательно, если ракету укрепить на вершине башни, то половина молекул будет покидать Землю. Это ценное предложение.

Применительно к распределению Максвелла оно означает следующее. Мы не можем пока растянуть кривую вправо так, чтобы половина молекул оказалась правее FG (кривая C). Для этого понадобилось бы увеличить $v_{ср}$ в $4{,}8$ раза, т.е. температуру газа в $4{,}8^2 \approx 23$ раза. Ну что ж, не можем сдвинуть кривую вправо, тогда давайте сдвинем прямую FG влево! Так, чтобы она совпала с DE. При этом нужный нам результат будет достигнут: половина молекул покинет Землю. И хотя этот вариант не совсем равноценен варианту с кривой C, тем не менее он увеличивает эффективность во много раз. Во-первых, число молекул, покидающих Землю, возрастает примерно в 50 млрд. раз (дополнительным преимуществом является то, что атмосфера меньше загрязняется). Во-вторых, скорости молекул будут меньше растрачены в поле земного тяготения. И то, и другое благоприятствует решению задачи. Правда, понадобятся затраты энергии для того, чтобы ракетное топливо доставлять на башню. Но можно показать (да вы и сами чувствуете это), что затраты будут меньше, чем в предыдущих проектах, так как к.п.д. транспорта даже в худшем случае будет порядка 1%, а к.п.д. в первом варианте не превосходил $10^{-9}\%$. А если башня (точнее, две башни по обе стороны Земли, иначе вместо укорочения года получим укорочение суток) стоит на экваторе, то затрачивать энергию на подъём топлива нужно только на первых $36\,000$ км. На бóльших высотах вступает в действие двигатель из задачи «Автор изобрёл вечный двигатель», который облегчит решение… Нет, к сожалению, не облегчит. В задаче речь идёт о наших ближайших потомках. А им не под силу построить такую башню. В задаче «Автор изобрёл вечный двигатель» она предлагалась для далёкого будущего, настолько далёкого, что даже невозможно предсказать, когда оно наступит и наступит ли вообще. Но в столь отдалённом бу-

дущем химические ракеты для такой цели вряд ли будут использоваться. Возможно, что они даже будут забыты [1].

Вернёмся в нашу задачу, к ближайшим потомкам. Двигатели, дающие скорость струи выше 11,2 км/с, более полезны для решения задачи.

Такими двигателями будут ионные (пока что их мощность и к.п.д. весьма малы и они применяются лишь для коррекции орбит спутников и кораблей) и фотонные. Ионные двигатели извергают струю заряженных частиц – ионов и электронов, ускоряемых с помощью электрических и магнитных полей. При этом легко достижимы скорости в десятки тысяч километров в секунду (электрон уже при ускоряющем поле в 100 вольт приобретает скорость 5930 км/с). Гигантские ускорители заряженных частиц, направленные жерлами в небо, весьма перспективны как двигатели для Земли.

Фотоны излучаются со скоростью 300 000 км/с. Вы можете уже сейчас, без особого труда изменить орбиту Земли, включив карманный фонарик и направив струю фотонов в небо на достаточно большое время [2]. Только делать это следует при ясном небе, иначе фотоны отразятся от туч обратно, а чтобы ваше предприятие было успешным, фотоны должны покинуть Землю.

21. Совершали ли вы космический полёт?

А

Учебники астрономии и космонавтики утверждают, что в поле тяготения Земли тело летит по параболе только при условии, что его скорость равна второй космической (вблизи поверхности Земли вторая космическая скорость равна 11,2 км/с). Если же скорость меньше, то тело движется по эллипсу, если больше – по гиперболе. Но вот мы бросаем камень – и он, как утверждают учебники физики, летит по параболе, хотя его скорость всего каких-нибудь 10 м/с, т.е. в тысячу раз меньше второй космической. Как это объяснить?

Б

Попробуйте рассмотреть, как полетел бы камень дальше, если бы ему не помешала поверхность Земли, т.е. если бы вся масса Земли была сосредоточена в её центре.

---

[1] Читатель Михайлов предложил изменить орбиту Земли путём быстрого устранения Луны. При этом нужно израсходовать в качестве топлива всего лишь ⅓ массы Луны, а орбитальная скорость Земли (30 000 м/с) изменится на целых 13 м/с. Читатель Окунев (Киев) предложил изменить орбиту Венеры путём торможения (ядерными взрывами) одного из спутников Сатурна и точного попадания этим спутником в нужную точку Венеры. Конечно, в этих проектах не соблюдаются условия задачи (современность ракет). И, кроме того, удары по небесным телам, скорее всего, приведут к разрушению и Луны, и спутника Сатурна, и Венеры. Однако в смелости полёта фантазии читателям не откажешь. Жаль только Луну, уж больно она симпатичная.

[2] Для недогадливых: автор шутит. Хотя в принципе он и прав, т.е. орбита Земли при этом изменится, но так мало, что всерьёз об этом говорить нельзя. Кроме того, несогласованность действий отдельных читателей друг с другом приведёт к тому, что они будут сдвигать Землю в разных направлениях. Наконец, отражающие солнечный свет естественные зеркала – водные поверхности (да и суша) – делают это сильнее, чем все читатели, вместе взятые, даже если их возглавит автор.

В

Рис. 15

На рис. 15 показаны траектории тел, вылетевших с различными скоростями из точки P, расположенной вблизи поверхности Земли. Скорость каждого тела в точке P направлена горизонтально.

Если скорость тела v такова, что центростремительное ускорение v^2/R равно ускорению свободного падения g, то тело движется по окружности B, центр которой совпадает с центром Земли. Из соотношения

$$\frac{v^2}{R} = g$$

находим, что нужная для этого скорость

$$v = \sqrt{gR}\,.$$

У поверхности Земли $g = 9{,}81\ \text{м/с}^2$, $R = 6380\ \text{км}$ (радиус земного шара). Поэтому

$$v = \sqrt{9{,}81 \cdot 6\,380\,000} \approx 7{,}9\ \text{км/с} = v_{1\text{к}}\,.$$

Эта скорость называется круговой или первой космической – это тот минимум скорости, который необходим, чтобы тело, брошенное горизонтально, не упало, а совершило полёт вокруг Земли (и здесь и дальше мы не учитываем сопротивление воздуха).

Если скорость больше $v_{1\text{к}}$, то ускорение свободного падения не сумеет искривить траекторию до окружности. Кривизна траектории будет меньше, тело полетит по эллипсу (C_1 или C_2). Удаляясь от Земли, тело израсходует избыток кинетической энергии на подъём. Достигнув максимального удаления (апогей, точка A_1 или A_2), тело начинает расходовать накопленную потенциальную энергию на увеличение своей скорости (на второй половине эллипса), возвращаясь к исходной точке P, которая, таким образом, является перигеем орбиты.

Центр масс Земли находится в ближнем к точке старта фокусе эллипса. Второй фокус находится рядом с апогеем, на таком же расстоянии от A, на каком первый находится от перигея P. Окружность является частным случаем эллипса, у которого оба фокуса совпадают. Чем больше скорость v по сравнению с $v_{1\text{к}}$, тем больше расходятся фокусы, тем сильнее вытянут эллипс. Наконец, при некоторой скорости $v = v_{2\text{к}}$ второй фокус эллипса оказывается бесконечно далеко от Земли, т.е. орбита оказывается разомкнутой, имеющей форму параболы D. Скорость $v_{2\text{к}}$ называется параболической, второй космической или скоростью убегания. Тело, ушедшее от Земли с такой скоростью, никогда не вернётся обратно (если не вмешается какое-либо третье тело, например, Луна).

Вторая космическая скорость ровно в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической. У поверхности Земли

$$v_{2\text{к}} = v_{1\text{к}} \cdot \sqrt{2} = 7{,}9 \cdot 1{,}41 \approx 11{,}2\ \text{км/с}\,.$$

При скорости, превосходящей вторую космическую, тело движется по гиперболе E, которая тем больше приближается к прямой F, чем выше скорость.

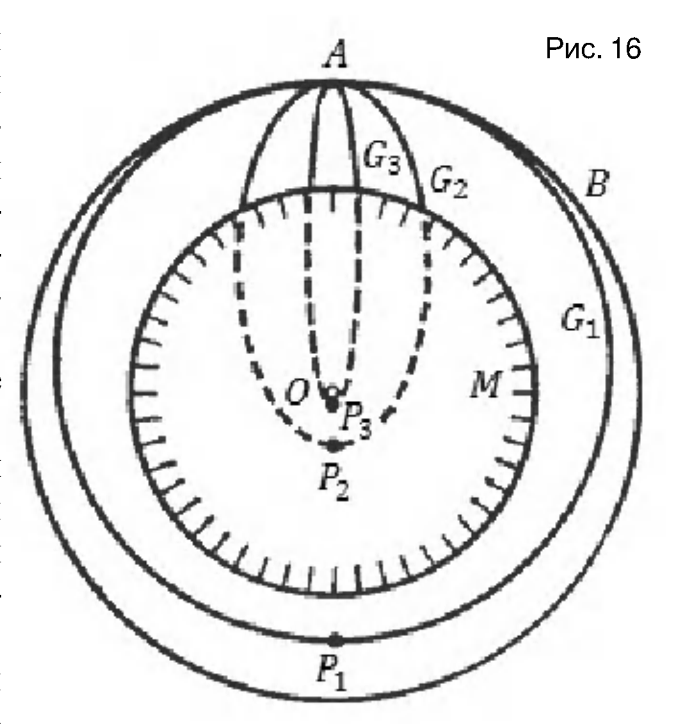


Рис. 16

Рассмотрим теперь поведение тела при скорости, меньшей первой космической (круговой) $v_{1к}$. Пусть точка A (рис. 16) находится на большой высоте над Землёй (чтобы телу было куда падать). Допустим, что скорость тела чуть-чуть меньше первой космической. Тогда оно не сможет идти по круговой орбите и начнёт с неё снижаться (G_1). Таким образом, точка старта A в этом случае является самой удалённой точкой орбиты, т.е. её апогеем. Орбита G_1 также оказывается эллипсом, только теперь центр масс Земли находится в другом, более далёком от точки старта фокусе. Фокусы эллипса как бы поменялись ролями.

С дальнейшим уменьшением стартовой скорости тела эллипс (G_2) начинает пересекать поверхность земного шара M, т.е. полёт перестаёт быть космическим. Этого не произошло бы, если бы вся масса Земли была сосредоточена в её центре. Чем меньше скорость тела в апогее A, тем ближе перигей P к центру масс Земли. При обычных земных скоростях тел (десятки метров в секунду) перигей оказывается в непосредственной близости к центру, а эллипс – чрезвычайно сильно сплющенным.

Теперь можно сравнить траектории тел с $v \approx v_{2к}$ и $v \approx 0$. Когда скорость тел мы увеличивали до второй космической, то эллипсы всё более и более *вытягивались* (C_1, C_2 и т.д. на рис. 15), пока не превратились в параболу. Примыкающая к точке старта часть эллипса, так же как и противоположная, тем меньше отличается от параболы D), чем ближе скорость тела к $v_{2к}$. Когда скорость тел мы уменьшали до нуля, то эллипсы всё более и более *сплющивались* (G_1, G_2 и т.д. на рис. 16), *что для их формы равносильно вытягиванию*. В результате примыкающая к точке старта часть эллипса опять оказывается всё больше приближающейся к параболе. При скоростях $0 \div 1000$ м/с часть траектории тела, проходящая над поверхностью Земли, практически совпадает с параболой.

В школьных учебниках параболичность траектории камня доказывается без участия законов Кеплера. Это доказательство справедливо, если в пределах всей траектории ускорение свободного падения постоянно по величине и направлению. В условиях полёта камня или пули это в высшей степени правильно. Но уже снаряды дальнобойных орудий, а тем более ракеты летят в неоднородном поле тяжести (на пути в 111 км направление силы тяжести меняется на один градус), поэтому здесь уже приходится учитывать, что траектория является отрезком эллипса, в дальнем из фокусов которого находится центр масс Земли.

Интересно в связи с этим заметить, что с принципиальной точки зрения полёт Валерия Брумеля над планкой при прыжке в высоту (как, впрочем, и каждого из вас) ничем существенным не отличается от космического полёта. Прыгун, разбегаясь и отталкиваясь, выходит на эллиптическую орбиту, в одном из фокусов которой находится центр масс Земли. Во время выхода на орбиту (толчок) он, естественно, испытывает перегрузки. Зато на протяжении всего полёта он испытывает самое настоящее

(без всякой подделки!) состояние невесомости (если, конечно, пренебречь сопротивлением воздуха)[1].

Пройдя апогей своей орбиты (высшая точка над планкой), прыгун идёт на снижение и, наконец, приземляется, подвергаясь при этом, как и полагается в конце космического полёта, перегрузке. Единственное в этом смысле отличие полёта Валерия Брумеля от полёта Юрия Гагарина состоит в том, что у орбиты Гагарина и апогей и перигей находились вне Земли, в то время как у орбиты Брумеля над планетой находится лишь апогей, а перигей находится внутри планеты, что, естественно, мешает ему закончить полный виток вокруг Земли. Может быть, это удастся Владимиру Ященко?

22. Хочешь быстрее – тормози!

А

Космический корабль-спутник совершает вокруг Земли 10 оборотов в сутки. По каким-то соображениям ему нужно ускорить своё движение так, чтобы совершать 12 оборотов в сутки. Что должен сделать космонавт: ускорить или затормозить корабль?

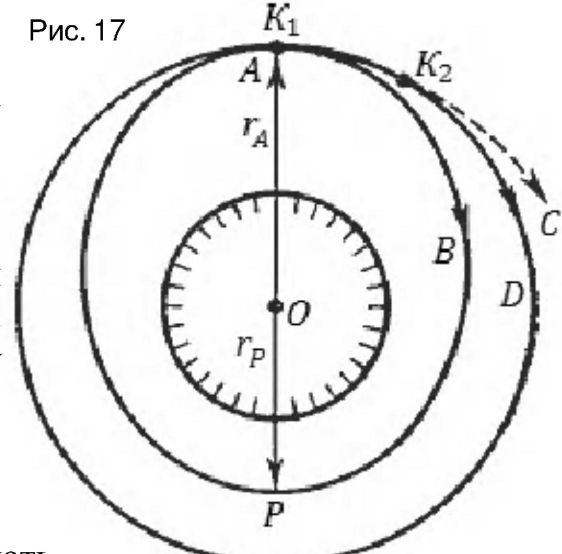
Б

Космонавт должен затормозить корабль, к удивлению тех, кто хорошо знает законы движения наземного транспорта, но не знаком с космонавтикой. Доказать это можно с помощью законов Кеплера.

В

Третий закон Кеплера применительно к системе Земля – спутник гласит: «Квадраты времён обращения спутников вокруг Земли пропорциональны кубам их средних расстояний от центра Земли». Отсюда следует, что для уменьшения периода обращения необходимо уменьшить среднее расстояние Земля – спутник. Под средним расстоянием $r_{\text{ср}}$ необходимо понимать среднее арифметическое из наибольшего расстояния r_A (в апогее) и наименьшего r_P (в перигее). Пусть для простоты первоначальная орбита спутника была круговой (D на рис. 17). Тогда среднее расстояние равно просто радиусу орбиты: $(r_D)_{\text{ср}} = r_A$. Для эллиптической орбиты B

Рис. 17



$$(r_B)_{\text{ср}} = \frac{r_A + r_P}{2} < (r_D)_{\text{ср}};$$

следовательно, по орбите B спутник будет совершать оборот быстрее, чем по орбите D.

[1] Точно так же создаётся и невесомость в самолёте, делающем «горку» по параболической траектории для тренировки космонавтов.

Как же перейти с орбиты D на орбиту B? Для этого спутник, движущийся по круговой орбите D, надо затормозить в момент прохождения через точку A. Тогда его скорости будет недостаточно для продолжения кругового движения, и он начнёт снижаться по кривой B. При снижении часть потенциальной энергии спутника преобразуется в кинетическую, отчего скорость его движения в перигее P возрастает. Избыток кинетической энергии заставляет его вновь подняться в апогей A, и т.д.

Рассчитаем, любопытства ради, первоначальную и окончательную орбиты спутника, упоминавшегося в условиях задачи. Из третьего закона Кеплера

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{(r_1)_{\text{ср}}^3}{(r_2)_{\text{ср}}^3}$$

следует, что радиус орбиты спутника

$$r_1 = r_2 \cdot \sqrt[3]{\frac{t_1^2}{t_2^2}}$$

можно найти по его периоду обращения t_1, если известны радиус орбиты r_2 и период обращения t_2 какого-нибудь другого спутника Земли. Можно использовать в качестве второго спутника Луну [$(r_2)_{\text{ср}} = 384\,400$ км, $t_2 = 27{,}32$ суток] или самый близкий из теоретически возможных (при отсутствии атмосферы) искусственных спутников Земли:

$$r_2 = 6380 \text{ км} \text{ – радиус Земли,} \quad v = 7900 \text{ м/с},$$

$$t_2 = \frac{2\pi r_2}{v} = \frac{40 \cdot 10^6}{7900} = 5070 \text{ с} = 84{,}5 \text{ мин}.$$

Принимая во внимание, что

$$t_1 = \frac{1}{10} \text{ суток} = 2 \text{ ч } 24 \text{ мин} = 144 \text{ мин} = t_D,$$

имеем для радиуса орбиты спутника

$$r_1 = 6380 \cdot \sqrt[3]{\frac{144^2}{84{,}5^2}} = 9120 \text{ км} = (r_D)_{\text{ср}},$$

т.е. спутник находится на высоте $h = 9120 - 6380 = 2740$ км.

Найдём теперь среднее расстояние спутника от Земли после торможения $\left(t_B = \frac{1}{12} \text{ суток} = 120 \text{ мин}\right)$:

$$(r_B)_{\text{ср}} = (r_D)_{\text{ср}} \cdot \sqrt[3]{\frac{t_B^2}{t_D^2}} = 9120 \cdot \sqrt[3]{\frac{120^2}{144^2}} = 8070 \text{ км}.$$

Перигейное расстояние

$$r_{BP} = 2(r_B)_{\text{ср}} - r_{BA} = 2(r_B)_{\text{ср}} - (r_D)_{\text{ср}} = 2 \cdot 8070 - 9120 = 7020 \text{ км},$$

т.е. высота перигея

$$h_P = 7020 - 6380 = 640 \text{ км}.$$

Рассмотренный манёвр космического корабля можно применять для того, чтобы догнать другой корабль. Допустим, на одну и ту же круговую орбиту D (рис. 17)

выведены два корабля K_1 и K_2. Они несут на себе различные детали спутника, которые надо собрать воедино. Для этого следует кораблю K_1 догнать корабль K_2. Если на орбите D корабль K_1 отстаёт от K_2 на 1 минуту пути, то корабль K_1 должен затормозить своё движение, чтобы перейти на такую орбиту B, на которой время обращения на 1 минуту меньше, чем на орбите D. Тогда ровно через один оборот (по орбите B) корабль K_1 догонит корабль K_2 в точке A. Таким образом, чтобы *догнать* впереди идущий спутник, задний должен *уменьшить* свою скорость.

Ту же задачу можно решить путём *увеличения скорости впереди идущего* корабля K_2. Тогда корабль K_2 пойдёт по орбите C. Если приращение скорости выбрано правильно, то после одного оборота корабли встретятся в точке K_2.

Не следует, однако, думать, что догнать корабль можно только таким способом. Описанный способ – самый экономичный по расходу топлива и самый простой для штурмана. Если же топлива много или если случай аварийный (нужно догнать немедленно!), то задний корабль может увеличить скорость, а возникающую при этом тенденцию корабля перейти на более высокую орбиту надо пресечь с помощью некоторой переориентации реактивной струи (см. следующую задачу).

23. В погоне за рекордом

А

В предыдущей задаче корабль совершал вокруг Земли сначала 10, а затем 12 оборотов в сутки. Не так уж много. Можно и больше: Герман Титов облетел за сутки Землю 16 с лишним раз. Хорошо бы побить его рекорд! Например, 20 оборотов в сутки. Ну, как, берётесь?

Б

– Нет, не берёмся! Ведь только что рассмотренный закон Кеплера показывает, что для увеличения числа оборотов надо уменьшить радиус орбиты. И даже если спутник летит на нулевой высоте ($r = 6380$ км), то и тогда его период обращения составляет 84 мин 30 с, т.е. спутник совершает только 17 оборотов в сутки. Из пропорции

$$\frac{20^2}{17^2} = \frac{6380^3}{x^3}$$

следует, что 20 оборотов в сутки можно сделать лишь на орбите радиусом $x \approx 5730$ км, т.е. на глубине 650 км под поверхностью Земли. Так что мы не берёмся. А автор?

В

Не робей перед врагом: лютейший враг человека – он сам.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 59

А автор берётся! Дайте мне точку опоры… Нет, не то! Дайте запас топлива на борт – и прошу садиться! Кто сказал, что нельзя сделать 20 оборотов в сутки? Кеплер? Но он устанавливал законы для небесной механики, а не для космонавтики. Ес-

ли наш корабль на орбите будет вести себя как небесное тело, т.е. совершенно пассивно отдаваться во власть силы тяготения, то рекорда, конечно, не будет. Однако у нашего корабля, в отличие от других небесных тел, есть двигатель. Разгоним корабль до нужной для рекорда скорости, большей, чем это требуется для удержания на круговой орбите. Сила инерции при этом будет стремиться сорвать корабль с круговой орбиты и отбросить прочь от Земли, но мы противопоставим ей силу двигателя, направив реактивную струю точно от Земли. Тогда создаваемая двигателем прижимающая к Земле сила дополнит силу тяготения так, что вдвоём они уравновесят силу инерции.

Будем ставить рекорд на орбите радиусом 7000 км, на высоте 620 км над Землёй (поскольку мы не отрываемся пока от бумаги, то имеющаяся на этой высоте радиационная опасность нам не страшна).

Если бы не было силы тяготения, то для удержания корабля массой m на круговой орбите радиуса r при угловой скорости ω к нему нужно было бы приложить центростремительную силу $F = m\omega^2 r$. На каждый килограмм массы корабля понадобилась бы удельная центростремительная сила $f = \omega^2 r$. Двадцать оборотов в сутки составляют

$$\omega = 20 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}00145 \text{ рад/с}.$$

Следовательно, удельная центростремительная сила (или центростремительное ускорение)

$$f = 0{,}00145^2 - 7\,000\,000 \approx 14{,}7 \text{ Н/кг} = 14{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Учтём теперь силу тяготения, которая возьмёт на себя $P = mg$ ньютонов или на каждый килограмм массы силу тяготения g, где g – ускорение свободного падения на нашей орбите, равное

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2} = 9{,}8 \cdot \frac{6380^2}{7000^2} \approx 8{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, на долю прижимающего к орбите двигателя остаётся

$$q = f - g = 14{,}7 - 8{,}1 = 6{,}6 \text{ Н/кг} = 6{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Чтобы не испортить нашего оптимистического настроения, не будем подсчитывать, сколько топлива нам понадобится на борту, чтобы совершить хотя бы суточный такой полёт. Отметим только, что двигатели должны быть включены круглые сутки и что топливо будет расходоваться катастрофически быстро, так как масса корабля будет огромной именно по причине необходимости иметь большой запас топлива.

Условия на борту такого космического корабля существенно отличаются от тех, в которых находились первые космонавты. Во-первых, на протяжении всего полёта в кабину доносятся шум и вибрация двигателей. Во-вторых, на таком корабле всё время существует «весомость» (не правда ли, это несколько непривычно для тех, кто уже освоился с космическим веком!). Правда, в нашем примере она в полтора раза меньше земной ($q = 6{,}6 \text{ м/с}^2 \approx \frac{2}{3} g_0$), что даёт одновременно и приятное чувство собственного веса и не менее приятное чувство лёгкости.

Направлен вектор искусственной тяжести не к Земле, а от неё. Поэтому мы будем постоянно видеть Землю над головой, а под ногами – космическую бездну. В таких условиях не советуем выходить из космического корабля на прогулку без прочного фала: вас унесёт с корабля, и вы полетите относительно него с ускорением 6,6

м/с^2, но не на Землю, а в противоположную сторону. Правда, в рассматриваемом случае вы не улетите от Земли навсегда, а только перейдёте на очень вытянутую эллиптическую орбиту (перигей которой будет в той точке, где вы опрометчиво покинули корабль, а апогей – на расстоянии около 70 000 км от центра Земли), но это является слабым утешением. Если же корабль совершает на орбите радиуса 7000 км в погоне за рекордом $16\sqrt{2} \approx 22{,}5$ или более оборотов в сутки, то, сорвавшись с такого корабля, любой груз перейдёт на гиперболическую орбиту относительно Земли, т.е. превратится в искусственную планету. Это же произойдёт и с самим кораблём, если его двигатель выйдет из строя.

Заметим, что полёт с угловой скоростью более 22,5 оборота в сутки на этой орбите будет сопряжён уже не просто с весомостью, а с постоянной перегрузкой, тем большей, чем больше число оборотов (или радиус орбиты).

Полезно для сравнения рассмотреть обратную задачу: облететь на космическом корабле вокруг Земли со скоростью, меньшей той, которую диктуют законы Кеплера. Это тоже возможно, но теперь реактивная струя должна быть направлена всё время к Земле, создавая подъёмную силу. Собственно говоря, именно так летит самолёт: для того чтобы не сорваться с «круговой орбиты» (полёта на постоянной высоте), самолёт с помощью двигателя и крыльев создает подъёмную силу, помогающую слабой центробежной силе инерции уравновесить силу тяготения. На самолёте имеет место «весомость», лишь чуть-чуть уменьшенная за счёт удаления от центра Земли и за счёт силы инерции (если самолёт летит на восток, попутно с вращением Земли). Груз, покинувший самолёт, падает на Землю, да и сам самолёт при отказе двигателей падает туда же. Правда, благодаря крыльям и наличию атмосферы траектория его падения отличается от кеплеровской.

Достижения космонавтики за последнее двадцатилетие кажутся нам огромными и потрясающими. Но это лишь первые космические шаги человечества, и мы радуемся им так, как радуется ребёнок, сделавший свой первый шаг. Человечество ещё не победило силу тяготения, оно только сумело приноровиться к ней. Мы ещё не можем пренебречь этой силой. Наоборот, находясь на орбите, мы целиком отдаемся её власти. Мы можем создать силу тяги, превосходящую силу тяготения, но лишь на короткое время; тяготение же действует непрерывно.

Пройдёт некоторое время – и во власти космонавта будут новые, могучие, неиссякаемые источники энергии, которые позволят развивать большую мощность в течение длительного времени. Тогда пилот не будет беспокоиться о тщательной коррекции орбиты, о точном моменте включения двигателей и о точной ориентации реактивных струй, так же как грибник, прогуливающийся по лесу, не рассчитывает каждый свой шаг. Космический корабль сможет, если надо, остановиться на орбите и повернуть обратно, установить описанный выше рекорд скорости или, заметив встречный метеорит, развернуться, догнать его и взять с собой. Такому кораблю будут доступны «мёртвая петля» и другие фигуры высшего пилотажа. На корабле будут совершаться туристические путешествия с облётом каждой из планет Солнечной системы *в течение месячного отпуска*. Стоимость путёвки умеренная, оплачивается профсоюзом.

24. На Луну со скоростью «Москвича»

А

Можно ли достичь Луны в ракете, удаляющейся от Земли со скоростью автомашины?

Б

Из каждых десяти опрошенных двое-трое считают это невозможным. Для полёта на Луну нужна вторая космическая скорость – и баста!

Космический век уже создал свои, космические, предрассудки. Надо от них освобождаться. Предыдущая задача показала, что законы небесной механики и законы космонавтики – не одно и то же. Попробуйте преодолеть гипноз космических скоростей: опишите полёт к Луне с постоянной умеренной скоростью и ваши впечатления о нём. Вам поможет аналогия: чтобы перебросить камень через 10-метровое дерево, надо придать камню вертикальную скорость порядка 15 м/с; в то же время комар достигает его вершины, двигаясь со скоростью 0,1 м/с.

В

Вы уже знаете, что совершить круговой полёт вокруг Земли можно в принципе с любой скоростью – и больше, и меньше первой космической. Но при этом понадобится держать двигатели всё время включенными. Первая космическая скорость нужна для кругового полёта с выключенными двигателями.

Это же верно и для полёта к Луне. С выключенными двигателями можно достичь Луны только при условии, что у Земли корабль приобрёл вторую космическую скорость[1]. А полёт с постоянно включенными двигателями позволяет добраться до Луны при любой скорости.

Теперь о впечатлениях. Ракета летит равномерно и прямолинейно. Следовательно, в ней нет ни перегрузок, ни невесомости. Состояние такое же, как если бы она была неподвижна в той же точке. Существует естественная весомость в соответствии с законом всемирного тяготения. По мере удаления от Земли сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния. Именно так нужно регулировать и силу тяги двигателей: сумма сил тяготения и тяги должна равняться нулю, иначе полёт перестанет быть равномерным и прямолинейным.

Когда до Луны останется одна десятая часть пути, сила тяги должна обратиться в нуль, так как в этой точке земная сила тяготения уравновешивается лунной и не нуждается в уравновешивании силой тяги. Ракета движется равномерно по инерции. Наступила невесомость. После этого лунное тяготение начинает преобладать над земным. Чтобы поддержать равномерность движения, разверните двигатель соплом к Луне и тормозите. Сила тяги должна быть равна силе тяготения Луны (за вычетом остатков земного тяготения). По мере сближения с Луной сила тяготения возрастает об-

[1] Точнее, несколько меньшую. Вторая космическая скорость нужна для параболической орбиты, по которой корабль может уйти от Земли бесконечно далеко. Для полёта же к Луне достаточно эллиптической орбиты, апогей которой будет в сфере действия Луны, т.е. там, где тяготение Луны больше тяготения Земли. Массы Земли и Луны относятся как $81:1$; поэтому точка, где силы тяготения Земли и Луны равны, делит прямую Земля – Луна в отношении $\sqrt{81}:\sqrt{1} = 9:1$.

ратно пропорционально квадрату расстояния до Луны. И если так же растёт и сила тяги (торможения) двигателей, то движение остаётся равномерным, а невесомость в корабле постепенно превращается в лунную весомость – около одной шестой от земной.

Стало традицией упрекать Жюля Верна за то, что при описании полёта из пушки на Луну он допустил ошибку. Да, он упустил из виду, что в его снаряде невесомость будет на протяжении всего полёта. Но зато если бы на место его снаряда поставить ракету из нашей задачи, то жюльверновское описание ощущений космонавтов оказалось бы идеально точным (если не считать непрерывной вибрации от двигателей).

Итак, полёт к Луне можно осуществить с комфортом: без перегрузок и почти без невесомости. Такие условия может перенести любой нетренированный человек. Почему же современные корабли летают иначе: с сильной перегрузкой на активном участке полёта и с полной невесомостью на орбите? Только из-за необходимости экономить топливо. Для непрерывной работы двигателя при равномерном движении к Луне топлива не хватит. В этом смысле вариант хуже, чем движение с малой постоянной скоростью, придумать нельзя. Впрочем, можно: пусть ракета зависнет неподвижно над Землёй. Для поддержания её в неподвижности потребуется непрерывная работа двигателя. При этом топливо может расходоваться сколь угодно долго, а продвижения вперёд не будет.

Этот крайний абсурдный случай показывает, чтó надо делать. Нужно как можно быстрее придать ракете необходимую скорость, чтобы топливо сгорело как можно раньше и не было бы лишних затрат энергии на его подъём на высоту. Циолковский показал, что идеальным является мгновенное сгорание топлива и мгновенный разгон ракеты до нужной скорости. Лучше всего приближается к идеалу пушечный выстрел. «Из пушки на Луну» – довольно экономичный способ космического полёта. Но это другая крайность, невозможная из-за недопустимо больших перегрузок космонавтов. Сейчас в космонавтике применяется компромиссный вариант, одинаково далёкий от обеих крайностей: на активном участке полёта космонавт подвергается большим перегрузкам, но в пределах допустимых, а затем наступает невесомость.

Впрочем, в полёте к Луне с постоянной автомобильной скоростью имеется и одно существенное неудобство: при скорости 100 км/ч путешествие к Луне будет длиться 3800 часов, т.е. около 160 суток. И хотя движение к Луне с постоянной скоростью довольно комфортабельно, но эту скорость надо выбирать намного выше.

Прежде чем расстаться с задачей, надо сделать одну оговорку: мы не учитывали, что цель нашего путешествия – Луна – сама движется, причём довольно быстро – со скоростью порядка 1 км/с. Это больше скорости «Москвича», но это не значит, что на Луну нельзя попасть со скоростью автомашины. Орбитальная скорость Луны направлена под прямым углом к трассе нашего «авто» (с небольшими периодическими отступлениями от прямого угла в обе стороны из-за эллиптичности орбиты). И если ракета будет хорошо нацелена в точку встречи с Луной и будет строго выдерживать заданные скорость и направление, то она рано или поздно достигнет Луны при любой скорости удаления от Земли.

При обычном (обычном!) космическом полёте (например, вроде того, с помощью которого на Луну доставлен наш вымпел) учёт движения Луны необходим. И вы не должны из сноски на стр. 50 делать вывод, что для достижения Луны достаточно прибыть в нейтральную точку между Землёй и Луной без запаса скорости в на-

дежде, что дальше Луна сама привлечёт вас к себе. Ракета, неподвижная относительно Земли, двигалась бы там относительно Луны со скоростью около 1 км/с, а эта скорость на таком расстоянии от Луны является гиперболической (относительно Луны). Иными словами, Луна так быстро убежала бы от ракеты, что та не успела бы разогнаться к Луне её полем тяготения и, совершив петлеобразное движение, вынуждена была бы вернуться восвояси к Земле. Для достижения Луны ракета должна зайти за нейтральную точку со скоростью 1 км/с, направленной попутно с Луной (и нейтральной точкой). Тогда ракета окажется в неподвижности относительно Луны и, находясь всё время в её поле тяготения, будет ею притянута.

25. Человек за бортом!

А

Большие стационарные искусственные спутники Земли с лабораториями, обсерваториями и жилыми помещениями будут монтироваться непосредственно на орбите из деталей и блоков, доставленных на орбиту порознь.

Представьте, что на круговой орбите один из монтажников, собирающих спутник, нечаянно уронил свой инструмент в космос. (Для любителей острых ощущений рекомендуем другой вариант: представьте, что это не инструмент, а вы сами, забыв прикрепиться к спутнику, нечаянно оттолкнулись от него.) Какова дальнейшая судьба инструмента (или любителя острых ощущений)?

Б

– Если молоток бросить на Земле, то он полетит по параболе, потому что он участвует в двух движениях: равномерном и прямолинейном по инерции и в вертикальном равноускоренном падении под действием притяжения Земли. Молоток, брошенный со спутника, будет удаляться от него равномерно и прямолинейно, так как второй причины – притяжения со стороны спутника – практически нет.

Мы согласились бы с вами, если бы в космосе, кроме корабля и молотка, ничего больше не было. Но ведь есть ещё Земля, Солнце и т.д.

– Влияние Земли и Солнца на взаимное расположение спутника и молотка можно не учитывать, потому что они одинаково влияют и на спутник, и на молоток, – возразите вы.

Мы и с этим согласились бы, если бы спутник и молоток всё время находились в непосредственной близости друг к другу. Но ведь молоток, как вы сами утверждаете, удаляется от спутника равномерно и прямолинейно. Когда он отойдёт от спутника на заметное расстояние, то Земля будет влиять на них не одинаково уже хотя бы потому, что направления сил тяготения, действующих на спутник и молоток, не параллельны, а пересекаются в центре Земли. Правильный ответ на вопрос можно получить из законов Кеплера.

В

И терпентин на что-нибудь полезен!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 60

Допустим, монтажник бросил молоток назад по орбите. Тогда орбитальная скорость молотка станет меньше орбитальной скорости спутника. Следовательно, молоток не сможет удержаться на круговой орбите и пойдёт к Земле по эллипсу, подобному эллипсу B на рис. 17. Первое время он будет отставать («равномерно и прямолинейно»). Прежде всего, видно, что молоток, совершив оборот вокруг Земли, вернётся в ту точку A, в которой он отделился от спутника. Но продолжительность полёта по эллипсу B короче, чем по окружности D, так как среднее расстояние молотка до Земли меньше, чем спутника. Поэтому молоток вернётся в точку A раньше спутника, опередив его на время t.

В дальнейшем и спутник и молоток будут регулярно возвращаться в точку A, но в разное время. После двух оборотов молоток придёт на время $2t$ раньше спутника, после трёх – на время $3t$. Если, например, период обращения спутника 10 000 секунд, а молотка – на $t = 10$ секунд меньше, то через 1000 оборотов спутника молоток опередит его на $1000t = 10\ 000$ секунд, т.е. ровно на один оборот, и, следовательно, они встретятся! Поскольку скорость молотка в точке A, являющейся для орбиты молотка апогеем, меньше скорости спутника, то спутник «догонит» молоток, т.е. молоток упадёт на спутник со стороны, противоположной той, куда его бросали. Скорость столкновения будет равна той, с которой был брошен молоток.

Разумеется, на практике такая встреча маловероятна. Во-первых, может оказаться, что за один оборот спутника молоток совершит иррациональное число оборотов (например, $\frac{\sqrt{1001}}{\sqrt{1000}}$ оборотов). Тогда молоток никогда больше не встретится со спутником, хотя иногда будет проходить рядом с ним весьма близко[1]. Во-вторых, в силу нестрогой шарообразности Земли и неравномерности распределения масс внутри земного шара плоскость орбиты спутника не сохраняет своё положение в пространстве неизменным: она медленно поворачивается. Плоскость орбиты молотка также будет поворачиваться, но в силу неодинаковости орбит повороты обеих плоскостей также будут неодинаковыми. Поэтому через некоторое время спутник и молоток будут вращаться вокруг Земли уже в разных плоскостях.

Можете представить, в какое трудное положение попадёт космонавт, неосторожно оттолкнувшийся от спутника и не запасшийся ракетным двигателем. Ему придётся совершить в одиночестве много оборотов вокруг Земли, пока он не приблизится к спутнику на расстояние, с которого товарищи на спутнике заметят его и сумеют принять спасательные меры. Впрочем, не всё ещё потеряно. Вынимайте из карманов, что есть, и с силой швыряйте от себя, тщательно обдумав, в каком направлении бросить, чтобы сила реакции вернула вас к кораблю. В первую очередь бросайте портсигар… У вас нет портсигара? А жаль, портсигар в космосе, как видите, крайне полезная вещь; и вообще это, кажется, единственное применение портсигара, приносящее пользу – поверьте курильщику. Но хватит ли портсигара? Если его масса равна 0,2 кг и вы бросили его со скоростью 20 м/с, то ваше количество движения изменилось на 4 $\text{кг} \cdot \text{м/с}$. А если ваша масса 100 кг и вы удаляетесь от корабля со скоростью 1 м/с, то, чтобы вернуться к нему, вы должны бросить не менее 25 портсигаров.

[1] Это верно для «точечных» спутника и молотка. Обладая же конечными размерами, они встретятся когда-нибудь и при иррациональном соотношении.

Строго говоря, каждый новый портсигар будет придавать космонавту чуть-чуть бóльшую добавку скорости, так как по мере расходования портсигаров (служащих «топливом» в нашем реактивном двигателе) ускоряемая масса убывает. Правда, это верно только при условии, что космонавт не устал и придаёт каждому портсигару одну и ту же скорость.

Вернувшись на корабль, вы получите крупную нахлобучку за халатность в работе и засорение космоса: каждый брошенный вами предмет создает смертельную опасность для других кораблей.

26. Дело помощи утопающим – дело рук самих утопающих

А

В научно-фантастическом рассказе Артура Кларка «Сделайте глубокий вдох» события происходят на большом стационарном искусственном спутнике Земли. Обслуживающий персонал живёт там многие месяцы, поэтому для удобства людей создана искусственная тяжесть за счёт центробежных сил, вызванных медленным вращением спутника-колеса. По окружности колеса к спутнику прикреплены каюты, в которых сотрудники отдыхают.

И вот однажды двое отдыхающих проснулись от пронзительного свиста: воздух через микроскопическую пробоину уходил из каюты. Выглянув в иллюминатор, потерпевшие увидели, что каюта оторвалась, отброшена центробежной силой и продолжает удаляться от спутника.

– Прежде чем нас найдут и отбуксируют к станции, мы будем мертвы, – это мрачное высказывание одного из потерпевших имеет под собой солидное основание: двигатели у каюты не предусмотрены, пробоину заделать невозможно, радиосвязи нет.

Вам предлагается выпутаться из этого положения. Только без паники!

Б

Огорошенный судьбою, ты всё ж не отчаивайся!

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 16*а*

В рассказе всё заканчивается благополучно: посланный за потерпевшими корабль находит их, догоняет и берёт к себе на борт. Соль рассказа состоит в том, что спасатели с помощью сварочного аппарата прорезают в каюте люк, через который потерпевшие молниеносно прыгают в шлюз спасательного корабля, причём прыгают, как сами понимаете, через космический вакуум (что при отсутствии скафандров скорее фантастично, чем научно). Сами потерпевшие полностью пассивны вплоть до решительного прыжка, составляющего кульминацию рассказа.

Для вас этот путь, естественно, отрезан, поскольку вы должны быть оригинальны. Вы сами должны вернуть каюту к спутнику (в этом соль нашего рассказа).

У вас нет двигателя? Надо найти.

В

Если хочешь быть счастливым, будь им.

КОЗЬМА ПРУТКОВ

«Мысли и афоризмы», № 80

В качестве двигателя надо использовать реакцию струи вырывающегося из пробоины воздуха. Следует только направить её в сторону, противоположную спутнику (перемещаясь внутри каюты в одну сторону, космонавты смогут поворачивать её в другую).

Предложение кажется фантастичным, поэтому придётся подкрепить его расчётами. Пусть в каюте содержится $10\ \text{м}^3$ воздуха при атмосферном давлении, масса каюты (вместе с космонавтами) $M = 300$ кг, температура 300 K. При этой температуре средняя скорость молекул воздуха составляет приблизительно 450 м/с (у азота чуть-чуть больше, у кислорода – меньше). Именно с этой средней скоростью молекулы вырываются из каюты через пробоину.

Поскольку при расширении газа в вакуум температура оставшегося газа не понижается (точнее, почти не понижается), то от начала до конца молекулы будут вылетать с постоянной средней скоростью. Правда, реактивная сила нашего двигателя со временем будет убывать, но по другой причине: постепенное понижение давления в каюте понижает не скорость вылетающих молекул, а их число. Нас это может не интересовать, так как общее количество движения вылетающих молекул (и, следовательно, изменение количества движения каюты) мы уже можем подсчитать.

Один кубометр воздуха при 300 K и нормальном атмосферном давлении имеет массу 1,2 кг. Масса $10\ \text{м}^3$ воздуха $m = 12$ кг. Следовательно, реактивная сила вытекающей струи, если её своевременно и полностью использовать, изменит скорость каюты на

$$V = \frac{mv}{M} = \frac{12}{300} \cdot 450 = 18\ \text{м/с}$$

(при строгом решении задачи в числителе должна стоять сумма произведений массы каждой молекулы на её индивидуальную скорость с учётом того, что направления вылета молекул не совсем одинаковы).

Если каюта оторвалась со скоростью 5 м/с, то, выпустив $^5/_{18}$ всего воздуха в противоположном движению направлении, потерпевшие остановят каюту (относительно спутника). Выпустив ещё $^5/_{18}$ атмосферы, они придадут ей обратную скорость 5 м/с (в принципе следовало бы ещё учитывать, что из-за потери воздуха масса каюты убывает и на обратном пути она меньше, но мы этим пренебрегаем). Оставшийся воздух будет иметь давление $^8/_{18} \approx 0{,}45$ атм, и ещё можно будет с грехом пополам дышать. Сейчас бы самое время заткнуть пробоину. Но если это невозможно, то надо продолжать ориентировать струю от спутника, увеличивая свою скорость (и шансы на спасение) и уменьшая давление воздуха (и шансы на спасение).

Ну, а если каюта удаляется с большой скоростью? Кстати сказать, у Кларка скорость каюты 30 миль в час (около 15 м/с). Тогда дела наши хуже. Но бороться надо: ведь реактивная струя в этом случае может по крайней мере остановить каюту. Следовательно, каюта не уйдёт слишком далеко и её скорее найдут. Наше бездействие было бы неразумным ещё и потому, что неконтролируемая струя, возможно, разгоняет каюту. Теперь, даже если помощь запоздает, мы погибнем с гордым сознанием,

что сделали всё, на что способен человек в данной ситуации (впрочем, возможно, мы ещё что-нибудь и упустили).

Отметим, что из задачи следует и менее героический, но вполне практичный вывод: если вам предоставят на выбор несколько кают, то выбирайте ту, в которой больше воздуха и меньше массы. Авось пригодится!

На этом можно было бы и закончить. Но трудно удержаться, чтобы не обсудить некоторые романтические подробности, упущенные Артуром Кларком (который обычно редко их упускает).

Направление пробоины случайно. Может случиться так, что струя будет выходить почти по касательной к поверхности каюты. Тогда каюта придёт во вращение, причём с ускорением! Да и удаляться от спутника она будет по замысловатой кривой.

Есть ли выход из этого нового затруднения? Теперь нужно не просто развернуть каюту в требуемом направлении, но сначала остановить её вращение. Вот выход: надо сделать вторую пробоину! Причём так, чтобы создаваемый второй струёй вращающий момент (произведение силы на плечо) был противоположен вращающему моменту от первой струи.

На рис. 18 показана цилиндрическая каюта и пробоина 1. Центр масс *O* находится в стороне от линии действия реактивной силы струи 1. Это и привело к вращению каюты (против часовой стрелки). Новая струя 2 должна проходить по другую сторону центра масс. Тогда она сможет раскручивать каюту в обратном направлении (струя 3 только помогала бы струе 1).

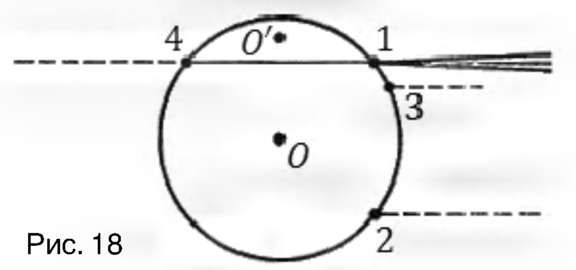


Рис. 18

Если у пробоин 1 и 2 по абсолютной величине вращающие моменты одинаковы, то они скомпенсируются, и вращение… нет, не прекратится, а только перестанет ускоряться. Для остановки вращения момент струи 2 должен быть больше момента струи 1. Тогда вращение начнёт замедляться. Но если вы вовремя не уменьшите вращающий момент струи 2, то каюта, остановившись, начнёт раскручиваться в противоположную сторону. Следовательно, в момент остановки необходимо или срочно пробить отверстие 3 нужных размеров, или, что разумнее, уменьшить отверстие 2. Вывод: пробоину 2 нужно делать так, чтобы она была доступна регулировке.

Добившись остановки вращения, разверните каюту (перемещаясь внутри неё или тонко регулируя отверстие 2) так, чтобы стру́и были направлены от спутника, к которому вы намереваетесь приблизиться.

Заметим, что остановить раскрутку каюты можно было бы и с помощью струи 4. Но стру́и 1 и 4 направлены встречно, они компенсировали бы друг другу не только раскрутку, но и поступательное движение, поэтому они не годились бы для главного – возврата каюты к спутнику. Стру́и 1 и 2 направлены попутно, и поэтому они наилучшим образом пригодны для поступательного разгона каюты.

Фу-у! Наконец-то мы сделали всё, что могли. Теперь можно вытереть пот со лба и ждать, чем всё это кончится. Впрочем, вытирая лоб, вы перемещаете руку, а вместе с нею и центр масс вашего «корабля», отчего вращающие моменты двух струй перестанут компенсироваться и каюта начнёт вращаться.

Разумеется, делать новые пробоины очень рискованно. Неосторожный удар – и пробоина может оказаться намного больше, чем требуется. Воздух улетучится слиш-

ком быстро, и наступит смерть. Компенсировать вращение лучше всё-таки с помощью перемещения космонавтов внутри каюты. При этом расход воздуха будет минимальным (единственная пробоина), возможность дышать будет более продолжительной и шансы дождаться спасения – выше. Однако от космонавтов потребуется необычная ловкость: бег по кругу с ускорением[1] в условиях невесомости при сохранении общего центра масс в определённом месте.

Правда, от бега можно избавиться, если есть возможность сместить центр масс в точку выше прямой 1-4 (в точку O', например). При этом струя 1 начнёт раскручивать корабль в обратную сторону (по часовой стрелке), т.е. затормаживать вращение, приобретённое в то время, когда центр масс находился в точке O. Когда вращение затормозится полностью, центр масс надо перенести на прямую 1-4. Такая возможность управления «кораблём» тем вероятнее, чем ближе прямая 1-4 проходит к геометрическому центру корабля.

И последнее: постарайтесь не удариться о спутник, если каюта к нему вернётся.

27. Вот тебе и невесомость!

А

Космонавт вышел из корабля в космос и с помощью индивидуального ракетного двигателя совершает прогулку по окрестностям. Возвращаясь, он несколько передержал двигатель включенным, подошёл к кораблю с избытком скорости и стукнулся о него коленом. Будет ли ему больно?

Б

– Не будет: ведь в невесомости космонавт легче пёрышка, – такой можно услышать ответ.

Ответ неправилен. Когда вы на Земле падали с забора, вы тоже были в состоянии невесомости. Но при ударе о земную поверхность вы ощутили заметную перегрузку, тем бóльшую, чем твёрже то место, на которое вы упали, и чем больше была ваша скорость в момент контакта с землёй.

В

Невесомость и весомость не имеют отношения к удару. Здесь важны масса и скорость, а не вес.

Будем считать удар о землю неупругим (при упругом ударе тело отскакивает, как мячик). При неупругом ударе вся ваша кинетическая энергия относительного движения обращается в нуль. Она расходуется частично на нагрев ударившихся тел, частично на их деформацию – на перелом ноги, например. Но в формулу кинетической энергии входят только масса и относительная скорость и совсем не входит сила тяжести. Правда, при падении с забора причиной вашей скорости было ускорение свободного падения. Но скорость есть скорость, независимо от причины, её породившей.

[1] Дополнительным преимуществом бега является то, что вы согреетесь и согреете воздух, отчего скорость вылета его молекул станет выше и ваш «двигатель» – мощнее. Эта шутка имеет и серьёзный аспект: если у вас найдётся электроподогреватель, поставьте его поближе к отверстию.

Поэтому не имеет значения, что при падении на корабль скорость определялась не ускорением свободного падения, а ускорением тяги ракетного двигателя. Ведь и на Земле вы могли удариться и при падении с высоты, и при быстром беге, – с одинаковыми последствиями. На этом примере особенно наглядно видна принципиальная разница между массой и весом тела. Космонавт ничего не весит, но масса его остаётся такой же, как и раньше.

И всё-таки космонавту при ударе о корабль будет не так больно, как вам при ударе о землю (при прочих равных условиях: одинаковых массах, относительных скоростях и одинаковой твёрдости препятствий). Масса корабля намного меньше массы Земли. Поэтому при ударе о корабль заметная часть кинетической энергий космонавта будет превращена в кинетическую энергию корабля, а на долю деформаций останется меньше. Корабль приобретёт дополнительную скорость, а болевое ощущение космонавта будет не таким[1] сильным.

Правда, поскольку масса корабля в десятки раз превосходит массу космонавта, то это уменьшение болевого ощущения представляет только академический интерес. И в невесомости можно набить шишку на лбу! А то, что лоб защищён скафандром, не даёт вам права на беспечность: трещина в гермошлеме может привести даже к худшим последствиям, чем трещина в черепе.

28. Запуск спутника вручную

А

Можно ли запустить искусственный спутник Земли без ракеты, так сказать, вручную, за счёт своей мускульной силы?

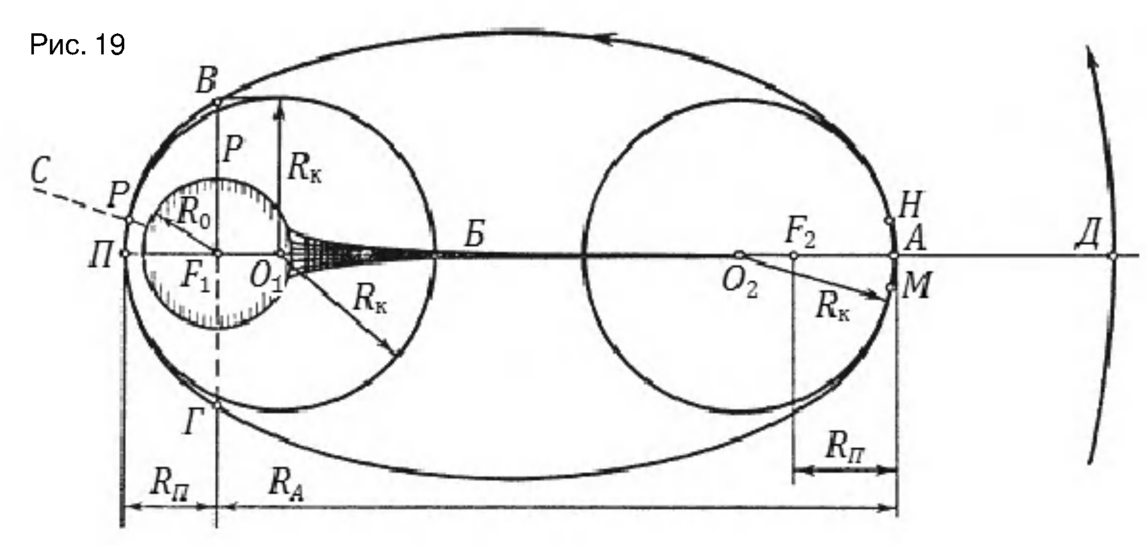
Б

Надо подняться на башню, описанную в задаче «Автор изобрёл вечный двигатель». Подняться можно (в принципе) за счёт мускульной силы, правда, при условии, что на каждом километре высоты имеется столовая, а через каждые три-пять километров – гостиница. Ну и, разумеется, при условии, что уже есть сама башня. Поскольку при строительстве башни можно обойтись без ракет, то использование башни не противоречит условиям задачи.

На какую же высоту надо подняться? Если вы считаете, что нужно подняться на высоту $H = 35\,800$ км, то вы правы лишь отчасти. Отпустив на этой высоте (точка $Д$ башни $Б$, в плоскости рис. 19 – экваториальное сечение Земли) какой-нибудь груз, вы превратите его в спутник с круговой орбитой и 24-часовым периодом обращения. Радиус такой орбиты равен $H + R_0 \approx 35\,800 + 6\,380 = 42\,180$ км, где R_0 – радиус Земли. При этом спутник всё время будет висеть рядом с вами (если вы, отпуская его, не придали ему руками дополнительной скорости). Но от вас не требова-

[1] Для полноты решения следовало бы учесть, что при падении с забора сила тяготения действует не только во время падения (увеличивая скорость), но и во время удара (увеличивая перегрузку на $1g$). Но эта поправка невелика. Падая с высоты $h = 2$ м и тормозясь на пути $\Delta = 2$ см (сравнительно мягкий грунт), человек должен испытать во время торможения стократную перегрузку. Добавление к $100g$ величины $1g$ практически ничего не меняет. Правда, эти расчёты верны только для «абсолютно твёрдого» человека.

Рис. 19



лось создания такого высокого спутника. С какой минимальной высоты можно запустить спутник вручную?

В

С меньшей высоты спутник с круговой орбитой вручную запустить нельзя (мы пренебрегаем той добавочной скоростью, которую ваши руки могут придать спутнику). Но можно придать ему эллиптическую орбиту. Поскольку линейной скорости башни (вращающейся вместе с Землёй) на меньших высотах (точка A) недостаточно для круговой орбиты, то отпущенный предмет будет падать на Землю. Но упадёт ли? Ведь башня придаёт ему горизонтальную составляющую скорости.

Как ясно из предыдущих задач, точка отпускания спутника будет апогеем A его орбиты. Высота отпускания должна быть такой, чтобы перигей $П$ орбиты оказался не внутри земного шара. Зададимся допустимым расстоянием перигея от центра Земли порядка $(R_П)_{доп} = 7000$ км (с запасом на толщину атмосферы и на погрешности расчётов на логарифмической линейке). Теперь остается вычислить апогейное расстояние R_A.

Для расчёта можете использовать данные предыдущих задач, а недостающие сведения взять, например, в журнале «Квант» (№ 11 за 1974 г. и № 2 за 1975 г.). Здесь мы, чтобы не повторяться, применим несколько иной путь. Этот путь не проще и не точнее других и, кроме того, требует от вас некоторых дополнительных знаний, но он менее стандартен, а знать нестандартные пути намного полезнее, чем ещё раз воспользоваться стандартным. *Воспользуемся тем, что эллипс обладает симметрией относительно своих большой и малой осей*. В силу симметрии кривизна эллипса в апогее и перигее должна быть одинакова. Требуемый радиус кривизны $R_к$ в перигее нам задан перигейным расстоянием $(R_П)_{доп} = 7000$ км, (но не равен ему, а зависит также и от R_A). Мы будем задаваться величиной R_A и вычислять соответствующие ей $R_к$ и $R_П$. Если при этом окажется, что $R_П \geqslant (R_П)_{доп}$, то задача будет решена.

Кру́гом кривизны в точке A кривой называется предельное положение круга, окружность которого проходит через A и две другие бесконечно близкие точки кривой H и M, когда $H \to A$ и $M \to A$ (см. рис. 19). Радиус кривизны кривой в точке A есть радиус $R_к$ круга кривизны. Центр кривизны для точки A есть центр этого круга O_2, он лежит на нормали к кривой в точке A. В силу симметрии эллипса радиусы кривизны для апогея A и перигея $П$ одинаковы. Из свойств эллипса известно, что для точек A и $П$

$$R_{\text{к}} = \frac{b^2}{a} = p\,, \qquad (1)$$

где a и b – большая и малая полуо́си эллипса, p – его фокальный параметр (половина хорды $ВГ$, проведённой через фокус F_1 перпендикулярно к большой оси, см. рис. 19). Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \qquad (2)$$

и, с другой стороны,

$$\varepsilon = \frac{R_A - R_П}{R_A + R_П}\,. \qquad (3)$$

Возводя формулу **(2)** в квадрат, подставляя в неё **(1)** и **(3)**, получаем

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{R_{\text{к}}}{a} = 1 - \frac{2R_{\text{к}}}{R_A + R_П} = \left(\frac{R_A - R_П}{R_A + R_П}\right)^2,$$

откуда

$$R_{\text{к}} = \frac{2R_A R_П}{R_A + R_П}\,. \qquad (4)$$

Задаваясь определённым R_A и вычисляя для него $R_{\text{к}}$ (некоторым независимым образом), мы из формулы **(4)** можем вычислить $R_П$:

$$R_П = \frac{R_A R_{\text{к}}}{2R_A - R_{\text{к}}}\,. \qquad (5)$$

Зададимся $R_A = 30\,000$ км и рассмотрим поведение предмета, отпущенного в точке A. Ускорение свободного падения g обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли (здесь R_0 – радиус Земли, g_0 – ускорение свободного падения на её поверхности):

$$g = \frac{R_0^2}{R_A^2} g_0 = \frac{6380^2}{30^2 \cdot 10^6} \cdot 9{,}81 \approx 0{,}442 \text{ м/с}^2\,. \qquad (6)$$

Начальная горизонтальная скорость отпущенного предмета равна скорости точки A башни (здесь Ω – угловая скорость вращения Земли и башни, стоящей на экваторе):

$$v_A = R_A \Omega = 30 \cdot 10^6 \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \approx 2170 \text{ м/с}\,. \qquad (7)$$

А теперь главное. Ищем радиус кривизны в точке A. В момент $t_0 = 0$ отпускаем предмет из рук. Если бы не было тяготения, то он полетел бы равномерно и прямолинейно по касательной к окружности, которую описывает точка A вращающейся башни (рис. 20). В течение $t = 1$ с он пролетел бы

$$R_t = v_A t = 2170 \text{ м}\,.[1] \qquad (8)$$

Наличие земного тяготения заставит предмет опуститься по направлению к центру Земли на

$$\Delta R = \frac{gt^2}{2} = \frac{0{,}442 \cdot 1^2}{2} = 0{,}221 \text{ м}\,, \qquad (9)$$

в результате чего он окажется в точке $Н$ (рис. 20).

---

[1] Поскольку, однако, башня продолжает вращаться, то от башни предмет не удалился бы, а только приподнялся бы на 8 см (настолько точка, движущаяся по касательной, отодвинется за секунду от окружности, с которой она сорвалась).

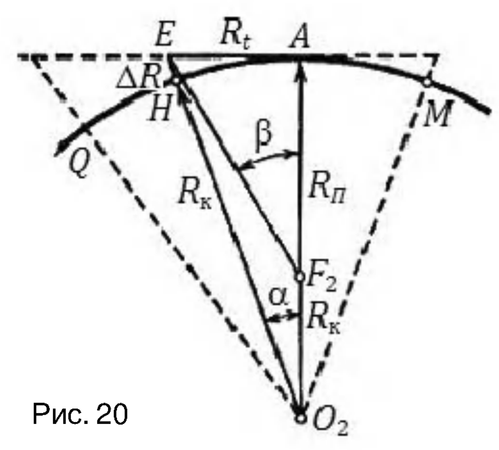


Рис. 20

Сделаем важную оговорку. На рис. 20 отрезок ΔR отложен по направлению к O_2, т.е. к центру кривизны, а не к центру Земли F_1. Это неправильно, но погрешность ничтожна. Углы на рис. 20 сильно преувеличены: если за сутки башня совершает один оборот, то за час она поворачивается на 15°, за минуту – на 15′, за секунду – на 15″. Углы α и β ненамного больше. Поскольку искомое перигейное расстояние порядка 7000 км, то β будет порядка 1′, и разницей в направлениях на F_1, на O_2 и на F_2 можно пренебречь.

Итак, мы имеем две точки A и H, лежащие на окружности кривизны, радиус $R_к$ которой мы ищем. Для построения окружности нужна третья точка. Её можно получить либо как положение Q предмета через $t = 2$ с, либо как точку M, положение которой нам уже известно из соображений симметрии. В первом случае мы найдём кривизну для средней точки H, во втором – для искомой A, однако при столь малых t это практически одно и то же. По определению круга кривизны точки H и M должны быть бесконечно близкими к A. Чтобы обойтись без дифференциального исчисления, мы берём точки не бесконечно близкие, а очень близкие к A. То, что вытекающая отсюда погрешность ничтожна, легко проверить: вычислив $R_к$ при $t = 1$ с, можно повторить вычисления для $t = 100$ с; при этом погрешность от конечности t всё ещё не превосходит погрешности логарифмической линейки. Это позволяет считать нижеследующие расчёты $R_к$ приемлемыми по точности.

Из прямоугольного треугольника EAO_2 следует, что $(R_к + \Delta R)^2 = R_к^2 + R_t^2$. Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемыми $\Delta R^2 \ll 2R_к\Delta R$, имеем

$$R_к = \frac{R_t^2}{2\Delta R} = \frac{2170^2}{2\cdot 0{,}221} = 10{,}6\cdot 10^6 \text{ м} \qquad \textbf{(10)}$$

и, согласно **(5)**,

$$R_П = \frac{R_A R_к}{2R_A - R_к} = \frac{30\cdot 10{,}6\cdot 10^{12}}{(2\cdot 30 - 10{,}6)\cdot 10^6} = 6{,}45\cdot 10^6 \text{ м}\,.$$

Это лишь на 80 км больше радиуса Земли, и, следовательно, предмет, отпущенный с точки A при $R_A = 30\,000$ км, пойдёт по эллипсу, огибающему Землю на высоте $h = 80$ км, т.е. сгорит в плотных слоях атмосферы и спутником не станет. Итак, мы немножко не угадали правильное R_A.

В качестве второй попытки выбираем несколько большее $R_A = 30\,500$ км. Теперь, согласно формулам **(6)** – **(10)**, имеем

$$g = 0{,}429 \text{ м/с}^2,\quad v_A = 2210 \text{ м/с},\quad R_t = 2210 \text{ м},$$
$$\Delta R = 0{,}215 \text{ м},\quad R_к = 11{,}3\cdot 10^6 \text{ м}$$

и, следовательно, $R_П \approx 7000 \text{ км} = (R_П)_{доп}$.

Задача решена. Наименьшее $R_A \approx 30\,500$ км, что соответствует высоте над поверхностью Земли

$$H_A = R_A - R_0 \approx 30\,500 - 6370 = 24\,130 \text{ км}.$$

Сверим наше решение с традиционным, которое опирается на закон сохранения энергии. Для спутника, не растрачивающего энергию на трение и др., этот закон записывается как постоянство суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$\frac{mv_П^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{R_П} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{R_A}, \qquad \textbf{(11)}$$

где m и M – массы спутника и Земли, γ – универсальная гравитационная постоянная, $\gamma M = 3{,}97 \cdot 10^{14}\ м^3/с^2$. Из второго закона Кеплера следует, что

$$v_П R_П = v_A R_A\,. \qquad \textbf{(12)}$$

С учётом этого формула **(11)** даёт

$$v_A^2(R_A + R_П) = 2\gamma M \frac{R_П}{R_A},$$

или

$$R_П = \frac{R_A^2}{\dfrac{2\gamma M}{v_A^2} - R_A} \approx \frac{30{,}5^2 \cdot 10^{12}}{\dfrac{2 \cdot 3{,}97 \cdot 10^{14}}{2210^2} - 30{,}5 \cdot 10^6} \approx 7000\ км\,.$$

Таким образом, энергетический метод и метод, основанный на радиусе кривизны, эквивалентны.

Итак, поднявшись на высоту 24 130 км (8 000 001-й этаж), можно смело бросаться вниз головой (в скафандре). Через 7 часов (3-й закон Кеплера) вы пронесётесь над Землёй на высоте 630 км и затем снова вознесётесь туда, откуда вы нырнули в космос. И через 14 часов вы легко и непринуждённо, с относительной скоростью, равной нулю, вернулись бы на всё тот же этаж башни, если бы башня оставалась на месте. Но её там уже нет и встретитесь вы с нею на месте старта только через 7 суток (в конце 12-го витка), если Луна за это время не повернёт вашу орбиту так, что вы проскочите мимо башни.

Впрочем, нет! Вы встретитесь с ней намного раньше. За 35 часов вы совершите 2,5 оборота, а башня – чуть-чуть меньше 1,5 оборота. Следовательно, незадолго перед этим, примерно через 34 часа после старта, число оборотов ваше и башни будет различаться ровно на один оборот. Это значит, что вы встретитесь с ней недалеко от перигея (в точке P на башне CP, показанной на рис. 19 пунктиром). Скорость башни в точке P в $R_A/R_П$ раз меньше, чем в A, т.е. порядка 500 м/с. Ваша скорость – в то же число раз больше, чем в A, т.е. около 9500 м/с. Поэтому ваша встреча с башней не будет лёгкой и непринуждённой. Вам следует позаботиться о своём спасении несколько раньше. Пожалуй, до того, как вы прыгнете с башни[1].

И вообще эта башня – дьявольское изобретение. Вращаясь в экваториальной плоскости, она будет сшибать всё, что встретится на её пути. А поскольку орбита любого спутника пересекает экваториальную плоскость, то рано или поздно все спутники, высота орбиты которых меньше высоты башни, будут ею сбиты. У подножья башни будут лежать обломки почти всей космонавтики.

Итак, по-видимому, прежде чем строить башню, надо сделать выбор: космонавтика или башня. Выбор произошёл уже сам собой: техника созрела для космонавтики гораздо раньше, чем она созреет для башни.

---

[1] А хорошо бы, прыгая с $R_A = 30\,000$ км и входя в плотные слои атмосферы, применить крылья, с помощью которых можно постепенно гасить свою космическую скорость (то погружаясь в атмосферу и нагреваясь, то рикошетируя от неё в вакуум и остывая), а затем на парашюте мягко приземлиться! То-то нам позавидовали бы прыгуны в воду, прыгуны с трамплина, прыгуны на батуте, прыгуны с парашютом и прыгуньи через верёвочку!

29. От полюса к полюсу

А

Спутник выведен на круговую полярную орбиту, т.е. такую, в плоскости которой находятся оба географических полюса. Как выглядит проекция его орбиты на поверхность земного шара?

Б

Многие утверждают, что проекция орбиты спутника совпадает с тем меридианом, вдоль которого он движется. Но тогда второй виток, как продолжение первого, должен проходить по тому же меридиану.

Другие, учитывая, что плоскость орбиты спутника должна быть неподвижной в пространстве, а Земля вращается вокруг своей оси, проходящей через полюсы, считают, что спутник пересекает все меридианы под некоторым углом. Но тогда возникают парадоксы: как можно уйти с полюса под углом к меридианам, если все направления с полюса – меридианы? И как спутник попадёт с Северного полюса на Южный?

Встречается и такой контрвопрос: а обязательно ли спутнику, проходящему над Северным полюсом, попадать ещё и на Южный? Обязательно! По первому закону Кеплера плоскость орбиты спутника содержит центр Земли. Если к тому же эта плоскость содержит в себе и один из полюсов, то она содержит и весь отрезок полюс – центр, на продолжении которого находится второй полюс.

Чтобы задача стала нагляднее, представьте, что Земля строго шарообразна (с радиусом r_0) и оклеена белой бумагой (как глобус), а спутник летит на высоте, равной нулю, и вертикально вниз с него направлен карандаш, который чертит на бумаге его след. И пусть при этом трение карандаша о бумагу никак не сказывается ни на ориентации карандаша, ни на скорости спутника.

В

Начнём с момента пролёта спутника над Северным полюсом. Спутник C движется вдоль некоторого меридиана M_0 (рис. 21) со скоростью $v_c \approx 8$ км/с, а Земля под ним поворачивается с угловой скоростью

$$\Omega_З = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi}{43\,200} \text{ рад/с}. \quad (1)$$

Спустя время t спутник C оказывается на некоторой широте θ, продвинувшись от полюса на угол $\gamma = \pi/2 - \theta$. Радиус малого круга параллели θ равен

$$r = r_0 \cdot \cos\theta. \quad (2)$$

За счёт вращения Земли меридиан M_0 отойдёт от спутника C на восток (для земного наблюдателя, стоящего на M_0, спутник отойдёт на запад) на величину дуги малого круга

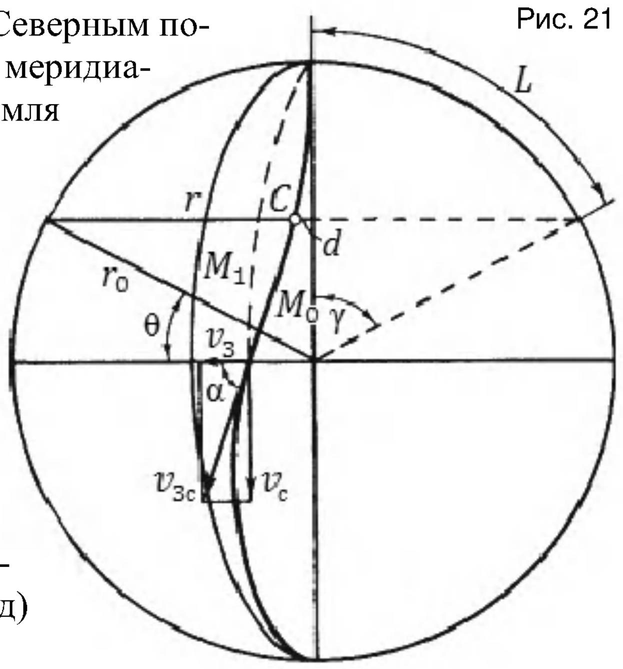


Рис. 21

$$d = r\Omega_3 t = r_0\Omega_3 t \cdot \cos\theta - r\Omega_3 t \cdot \sin\gamma\,, \qquad \textbf{(3)}$$

где $\Omega_3 t$ – длина этой дуги в радианах. Угол γ есть отношение дуги L к её радиусу:

$$\gamma = \frac{L}{r_0} = \frac{v_c t}{r_0}\,. \qquad \textbf{(4)}$$

Таким образом, окончательно, согласно **(3)** и **(4)**,

$$d = r_0\Omega_3 t \cdot \sin\frac{v_c t}{r_0}\,. \qquad \textbf{(5)}$$

На рис. 21 жирной линией ориентировочно показана кривая, которую прочертит полярный спутник на поверхности вращающегося земного шара за время первого полувитка (в горизонтальном направлении масштаб кривой преувеличен примерно вдвое). Спутник начинает своё движение от полюса строго по меридиану, но тут же, за счёт вращения Земли, начинает и отклоняться, сначала еле заметно (мала линейная скорость уходящего от спутника меридиана), затем всё быстрее. Наибольшая скорость расхождения спутника и меридиана (линейная скорость поверхности Земли v_3) – на экваторе:

$$v_3 = \frac{2\pi r_0}{T_3} = \frac{4\cdot 10^7}{24\cdot 60\cdot 60} \approx 450 \text{ м/с}\,. \qquad \textbf{(6)}$$

Угол α, под которым траектория спутника пересекает экватор, можно найти из прямоугольника скоростей (см. рис. 21):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_c}{v_3}\,,$$

что для спутника на нулевой высоте даёт

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Omega_c}{\Omega_3}\cdot\frac{r_0}{r_0} = \frac{v_c}{v_3} = \frac{8000}{450} = 17{,}7\,, \qquad \textbf{(7)}$$

откуда $\alpha \approx 86°45'$. После экватора v_3 вновь убывает, и траектория спутника вблизи Южного полюса идёт почти точно по меридиану M_1, отличному от начального M_0 на угол поворота Земли за время, соответствующее полувитку спутника:

$$M_1 - M_0 = \Omega_3\cdot\frac{T_c}{2} = \frac{\Omega_3}{2}\cdot\frac{2\pi r_0}{v_c} = \frac{\pi}{2\cdot 43\,200}\cdot\frac{4\cdot 10^7}{8\cdot 10^3} \approx 0{,}181 \text{ рад} = 10{,}3°\,. \qquad \textbf{(8)}$$

В малой окрестности полюса, где $\sin\gamma \approx \gamma$, формула **(5)** даёт

$$d = r_0\Omega_3 t\cdot\frac{v_c t}{r_0} = \Omega_3 v_c t^2\,, \qquad \textbf{(9)}$$

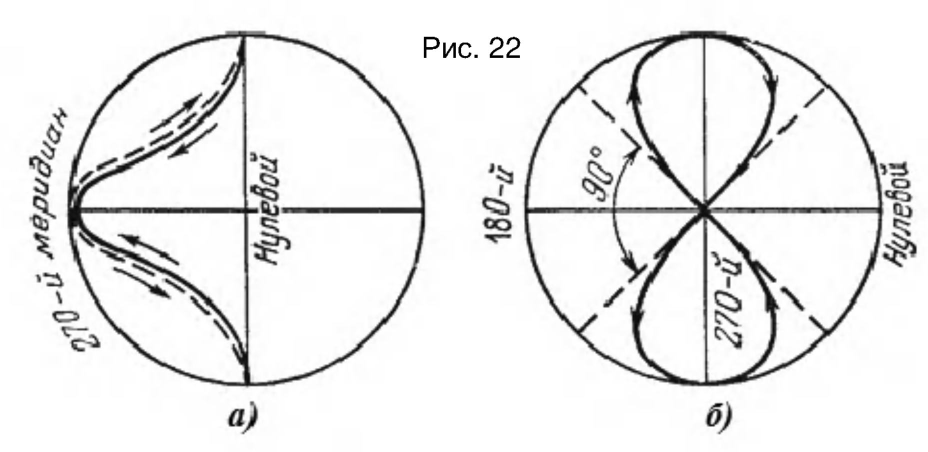
т.е. начальная часть траектории является параболой, касающейся меридиана (при условии, что соответствующий участок шаровой поверхности удалось бы распрямить на плоскости без разрывов).

В случае полёта на высоте $H > 0$ нужно рассматривать поведение на поверхности Земли не спутника, а подспутниковой точки (точки, для которой спутник находится в зените). Чем больше H, тем меньше орбитальная скорость спутника. Угловая же скорость (относительно центра Земли) подспутниковой точки

$$\Omega_c = \frac{v_c}{r_c} = \frac{v_c}{r_0 + H} \qquad \textbf{(10)}$$

убывает ещё быстрее, так как в формуле **(10)** не только убывает числитель, но ещё и растёт знаменатель.

Рис. 22



Любопытно поведение кругового спутника с радиусом орбиты $r = 42\ 180$ км. За сутки (звёздные) он совершает ровно один оборот. Если он движется по экваториальной орбите попутно с Землёй (на восток), то земному наблюдателю кажется висящим неподвижно над некоторой точкой экватора, так как $\Omega_с = \Omega_З$. Если же его вывести на полярную орбиту, то, начиная своё движение, например, от полюса по нулевому меридиану, за четверть оборота он достигает экватора и пересекает его на 90° западнее под углом

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\Omega_с}{\Omega_З} = \operatorname{arctg} 1 = 45°\,.$$

К Южному полюсу он подходит по 180-му меридиану (рис. 22*б*), после чего уходит от полюса вновь по нулевому меридиану (являющемуся продолжением 180-го). Продолжая отклоняться от него по-прежнему к западу, спутник пересекает экватор в той же точке: от экватора до экватора спутник совершил пол-оборота в полярной плоскости, а Земля за это время – тоже пол-оборота в экваториальной и подставила под спутник ту же самую точку. В результате на Земле подспутниковая точка за один оборот описывает «восьмёрку», пересекая на экваторе свою собственную траекторию под углом 90°. На рис. 22*а* показан вид этой траектории сбоку; сплошной линией показано движение подспутниковой точки на ближней к нам стороне земного шара, пунктирной – на обратной (пунктир должен совпадать со сплошной линией).[1]

30. Срочное приземление

А

На круговые полярные (но разные) орбиты в независимые друг от друга моменты времени выведено $N = 1000$ спутников-кораблей с экипажами. В некоторый случайный момент на все корабли поступает приказ Земли: «Немедленное приземление!» Где больше приземлится кораблей – в Антарктиде или в Африке?

Даём некоторые пояснения. Причиной приказа может быть, например, информация Службы Солнца: на нём обнаружена сильная вспышка, которая через несколько минут или часов (заряженные частицы от Солнца летят несколько медленнее света) создаст большую радиационную опасность для экипажей. Поэтому будем предпола-

[1] Более подробно с поведением подспутниковой точки для спутников разной высоты и наклонения можно познакомиться по книге: *А.Штернфельд*, Искусственные спутники, 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1958).

гать, что на выбор места посадки нет времени, команда исполняется немедленно. Второе: при оптимальном торможении двигатели разворачиваются соплами точно вперёд по направлению полёта, поэтому их работа не придаёт приземляющемуся объекту боковой скорости, и траектория приземления лежит в плоскости орбиты.

Для наглядности обе эти оговорки можно было бы заменить одной, простейшей, но не совсем реальной: корабли приземляются в той точке, над которой их застигла команда.

Б

Подавляющее большинство решающих рассуждает так. Спутники запущены в случайные, не связанные между собой моменты, команда на приземление застигает их в случайном положении, поэтому все точки приземления равновероятны. Площадь Африки $S_{\text{Аф}} = 29 \cdot 10^6$ км^2, Антарктиды – $S_{\text{Ан}} = 14 \cdot 10^6$ км^2, поэтому в Африке приземлится кораблей больше в

$$\frac{S_{\text{Аф}}}{S_{\text{Ан}}} = \frac{29}{14} = 2{,}07 \text{ раза}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Решение ошибочно. За один оборот каждый полярный спутник пролетает и над полюсом, и над экватором. Но полюс – точка, а экватор – линия, состоящая из бесконечного множества точек. Одинаково ли часто какой-нибудь конкретный спутник пролетает над Килиманджаро и Южным полюсом?

В

Для спутника с полярной круговой орбитой равновероятны не все точки Земли, а все широты. В самом деле, двигаясь равномерно, спутник одинаковое время находится между параллелями 0÷1° и 89÷90°. Значит, при внезапном приземлении в приэкваториальное «кольцо» 0÷1° длиной 40 000 км и шириной 111 км приземлится столько же кораблей, сколько в приполярное «кольцо» 89÷90° (внутренний радиус этого кольца бесконечно мал) такой же ширины, 111 км. (Мы считаем Землю строго шарообразной, поэтому приполярный градус широты в километрах равноценен приэкваториальному.)

В приполярном кольце с площадью $S_{\text{пол}}$ плотность кораблей будет в

$$\frac{n_{\text{пол}}}{n_{\text{экв}}} = \frac{S_{\text{пол}}}{S_{\text{экв}}} = \frac{2\pi r_0 \cdot 111}{\pi \cdot 111^2} = \frac{4\,440\,000}{38\,800} = 114 \text{ раз} \qquad \textbf{(2)}$$

больше, чем в приэкваториальном с площадью $S_{\text{экв}}$ (r_0 – радиус Земли). Заметим, что если бы мы взяли возле экватора и полюса ко́льца в 10 раз более узкие, то числитель формулы **(2)** уменьшился бы в 10 раз, а знаменатель – в 100, отчего дробь возросла бы в 10 раз. Уменьшая и далее, мы обнаруживаем, что для бесконечно узких колец вероятность приземления в некоторую точку у полюса, хотя сама по себе и бесконечно мала, но, тем не менее, в бесконечность раз больше, чем в некоторую конкретную точку у экватора[1].

---

[1] Отметим один парадокс. Над Южным полюсом спутник проходит один раз за оборот, над экватором – два! Следовательно, вероятности для них различаются вдвое? Парадокса нет, пока мы рассматриваем вместо полюса (точки) сколь угодно близкую к нему параллель (линию), которую,

Продолжение на следующей стр. ►

Дадим несколько иное объяснение этого, неожиданного для многих, эффекта. Остановим суточное вращение земного шара. Теперь каждый полярный спутник движется строго по своему меридиану (см. предыдущую задачу), поэтому густота приземлившихся спутников для любой местности пропорциональна густоте сетки меридианов. А густота возрастает к полюсам (посмотрите на глобус). Нетрудно видеть, что оговорку о мгновенности приземления, данную в условии, можно снять. Во время приземления спутник пролетает вперёд несколько тысяч километров, но с меридиана не сворачивает. Пусть все спутники однотипны (их траектории приземления идентичны). Тогда немгновенность их приземления эквивалентна мгновенности плюс одинаковый для всех сдвиг команды во времени, который не имеет никакого значения (команда поступает в случайный момент). Если же приземляются спутники нескольких типов, то полученное выше распределение плотности справедливо для каждого типа в отдельности, поэтому и суммарное распределение будет иметь тот же характер.

Снимем оговорку о неподвижности Земли. Суточное вращение Земли не влияет на текущую широту спутников и поэтому не меняет и плотности приземления. Смещение же с одного меридиана на другой не имеет значения, так как от номера меридиана (долготы) плотность не зависит.

Теперь исходная задача об Африке и Антарктиде становится ясной и уже, казалось бы, малоинтересной. Однако при решении её всплывают некоторые детали, заслуживающие внимания.

Если бы Африка и Антарктида имели форму колец, то решение можно было бы получить по аналогии с формулой (**2**). На самом деле решение значительно сложнее, в основном за счёт неправильных контуров континентов. Мы дадим приближённое решение.

Вычисление для Африки можно провести путём разбиения её параллелями на узкие «ленты», вычисляя число приземлений внутри каждой из них. Плотность приземления в разных лентах различна, но внутри любой из них приблизительно постоянна. Чем у́же ленты, тем точнее результат. Полный результат для Африки есть сумма приземлений во всех лентах.

Однако мы поступим иначе. Из любви к искусству попробуем подогнать фигуру Африки под удобную для вычислений, не нарушая, конечно, распределения кораблей по площади. Плотность точек приземления симметрична относительно экватора. Воспользуемся этим. Отобразим в плоскости экватора, как в зеркале, Западную Африку *А* (левее нулевого меридиана, заштрихована на рис. 23).

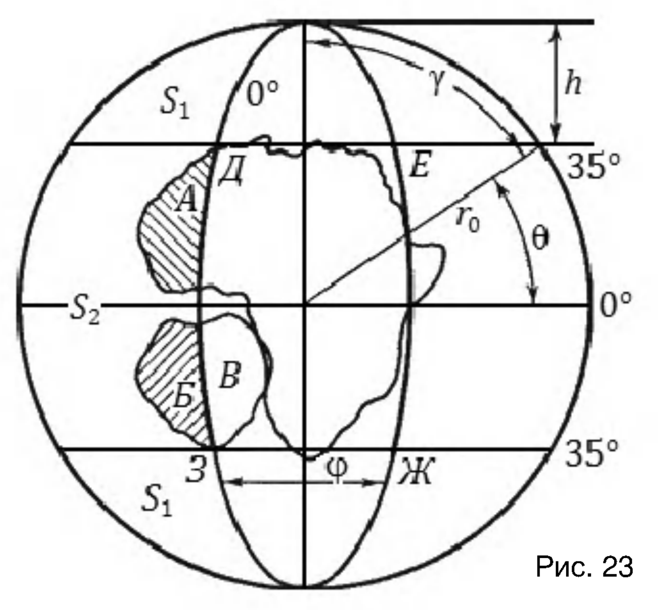


Рис. 23

как и экватор, спутник пересекает дважды. Парадокс возникает только тогда, когда мы линию пытаемся заменить неравноценным ей геометрическим объектом – точкой. Более глубокое обсуждение этого парадокса выходит за рамки данной книги. Можем лишь посоветовать обратиться к парадоксам теории множеств. Там ваше удивление возрастёт ещё больше.

Получим её зеркальное изображение *Б*. Ни площадь *Б*, ни распределение плотности по ней неотличимы от *А*. Следовательно, «усечённая» Африка плюс «остров» *Б* эквивалентны первоначальной Африке.

Поскольку все меридианы (в отличие от параллелей) в отношении плотности приземления равноправны, то мы можем передвинуть «остров» *Б* на новые меридианы без нарушения условий задачи, если только широ́ты точек «острова» при этом не изменятся. Можно придвинуть «остров» *Б* к Африке либо зеркально отразить его относительно меридиана 0°. Полученный при этом «полуостров» *В* почти точно дополняет «усечённую» Африку до «бочонка» *ДЕЖЗ*. Правда, остаётся Гвинейский залив и полуостров Сомали. Их широ́ты слегка различны, но поскольку оба они находятся в непосредственной близости к экватору, где плотность с широтой меняется крайне медленно, то мы, в нарушение строгости, закроем залив полуостровом.

Опираясь на географический атлас, примем угловую полувысоту «бочонка» равной 35°. Найдём теперь угловую ширину «бочонка» φ, исходя из его равновеликости Африке. Вся поверхность земного шара равна

$$S_{\text{ш}} = 4\pi r_0^2 = \frac{(2\pi r_0)^2}{\pi} = \frac{(40 \cdot 10^3)^2}{3{,}14} = 510 \cdot 10^6 \text{ км}^2 .$$

Часть поверхности шара от Северного полюса до 35-й параллели

$$S_1 = 2\pi r_0 h = 2\pi r_0 (r_0 - r_0 \sin\theta) = 40 \cdot 10^3 \cdot 6380 \cdot (1 - 0{,}573) = 119 \cdot 10^6 \text{ км}^2 .$$

Часть поверхности шара между двумя 35-ми параллелями

$$S_2 = S\text{ш} - 2S_1 = (510 - 2 \cdot 119) \cdot 10^6 = 272 \cdot 10^6 \text{ км}^2 .$$

Африка составляет от неё долю

$$\frac{S_{\text{Аф}}}{S_2} = \frac{29}{272} = \frac{\varphi}{360°} = \frac{38{,}2°}{360°} = 0{,}106 .$$

Итак, ширина «бочонка» в градусах $\varphi = 38{,}2°$. На пояс S_2 приходится

$$n_2 = N\frac{2\theta}{360°} = \frac{1000 \cdot 70}{180} = 390 \text{ кораблей} ,$$

на Африку –

$$n_{\text{Аф}} = n_2 \frac{\varphi}{360°} = n_2 \frac{S_{\text{Аф}}}{S_2} = 390 \cdot 0{,}106 \approx 42 \text{ корабля} .$$

На рис. 24 показаны контуры Антарктиды (масштаб крупнее, чем у Африки). Пунктиром показан контур «круга», по площади равновеликого Антарктиде, он охватывается 70,7°-й параллелью. Доля кораблей, приземлившихся внутрь этого круга, равна доле широт, попавших внутрь круга:

Рис. 24

$$\frac{n_{\text{Ан}}}{N} = \frac{90° - 70{,}7°}{180°} = 0{,}107 .$$

Число приземлившихся кораблей

$$n_{\text{Ан}} = 0{,}107 \cdot N = 107 .$$

Для круга это число правильное, для Антарктиды – завышенное, так как на море, попавшее внутрь круга, сядет больше кораблей (Δn_1), чем на равновеликую

ему сушу (Δn_2), находящуюся вне круга: вне круга плотность меньше, чем внутри. Уточнить решение можно, вычислив Δn_1 и Δn_2 с помощью подходящих аппроксимаций (кольцевыми «лентами») и вычитая разницу $\Delta n_1 - \Delta n_2$из числа $n_{\text{Ан}}$. Мы заниматься уточнением не будем.

Средняя плотность кораблей, приземлившихся в Африке и Антарктиде.

$$P_{\text{Аф}} = \frac{n_{\text{Аф}}}{S_{\text{Аф}}}\,, \quad P_{\text{Ан}} = \frac{n_{\text{Ан}}}{S_{\text{Ан}}}\,,$$

а их отношение

$$\frac{P_{\text{Ан}}}{P_{\text{Аф}}} = \frac{n_{\text{Ан}}}{n_{\text{Аф}}} \cdot \frac{S_{\text{Аф}}}{S_{\text{Ан}}} = \frac{107}{42} \cdot \frac{29}{14} = 5{,}3\,.$$

Для других, неполярных, спутников ситуация срочного приземления не менее любопытна. Так, экваториальные спутники приземляются только на экваторе и нигде больше (разве что с небольшим разбросом за счёт неточности ориентации тормозных двигателей). В случае спутников, плоскость орбиты которых составляет угол θ_0 с экваториальной плоскостью, максимум плотности приходится на широты $\pm\theta_0$, к экватору же плотность $P(\theta)$ симметрично убывает (рис. 25*б*). При $|\theta| > |\theta_0|$ плотность равна нулю, так как в эти широ́ты спутники не залетают.

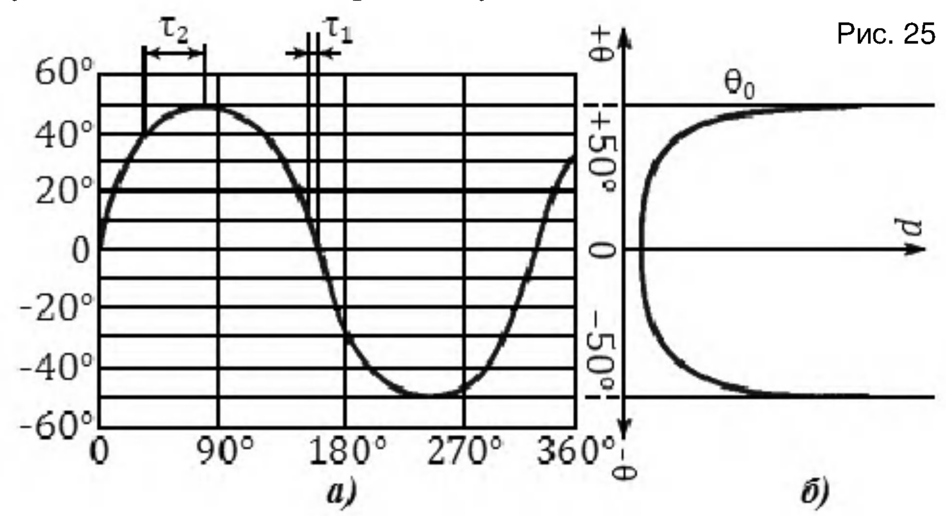


Рис. 25

Поведение плотности $P(\theta)$ поясняется рис. 25*а*, где широ́ты и долго́ты составляют декартову систему координат. Траектория подспутниковой точки изображается кривой, напоминающей синусоиду (но из-за сферичности Земли не совпадает с ней; вычислить её можно методами сферической тригонометрии). Вблизи экватора время пролёта спутником кольца́ шириной 10° равно τ_1, вблизи широты θ_0 оно значительно больше ($\tau_2 \gg \tau_1$), так как крутизна кривой там наименьшая.[1] Этим определяется вероятность пребывания спутника в соответствующих широтах и плотность точек приземления (рис. 25*б*) при срочной посадке. На рис. 25 показан случай $\theta_0 = 50°$.

Между прочим, из этой задачи следует, что вероятность столкновения на орбите для полярных спутников наибольшая над полюсами (если других, неполярных, спутников нет), для спутников с наклонением орбиты θ_0 – над широтами $\pm\theta_0$. Впрочем, в последнем случае, при строго идентичных орбитах, скорость «столкновения» над широтами $\pm\theta_0$ равна нулю.

[1] Аналогично описывается время (и вероятность) пребывания качающегося маятника на различных расстояниях от вертикали. То же можно сказать о распределении мгновенных значений синусоидального напряжения.

31. Сегодня же к Проксиме Центавра!

А

Уже сейчас можно послать корабль к звёздам. Но почему-то везде пишут, что для полёта к звёздам нужны корабли с околосветовой скоростью. Таких кораблей нет. Когда их удастся разработать – неизвестно. Может быть, через 1000 лет. Стоит ли так долго ждать? Давайте пошлём к звёздам уже сейчас то, что можем! Например, к Проксиме («Ближайшей») Центавра пошлём корабль, покидающий Солнечную систему со скоростью $v_1 = 30$ км/с.

Есть возражения?

Б

Рассчитайте, когда корабль достигнет Проксимы Центавра, расстояние до которой 4,2 св. года. А затем представьте, что через 50 лет можно будет послать корабль со скоростью $v_2 = 100$ км/с. Когда он достигнет той же звезды?

В

Корабль движется медленнее света в

$$\frac{c}{v_1} = \frac{300\,000}{30} = 10\,000 \text{ раз},$$

следовательно, расстояние до цели он преодолеет за

$$t_1 = 4{,}2 \cdot \frac{c}{v_1} = 42\,000 \text{ лет}.$$

Если же подождать $t_v = 50$ лет (?), когда будет достигнута скорость $v_2 = 100$ км/с, то

$$t_2 = 4{,}2 \cdot \frac{c}{v_2} = 12\,600 \text{ лет},$$

а от сегодняшнего дня

$$t_v + t_2 = 50 + 12\,600 = 12\,650 \text{ лет},$$

т.е. корабль, посланный на 50 лет позже, достигнет цели на 29 350 лет раньше.

Если же дожидаться $v_3 \approx 0{,}9c$ нужно $t_v = 1000$ лет, то

$$t_v + t_3 = t_v + 4{,}2 \cdot \frac{c}{v_3} = 1000 + \frac{4{,}2}{0{,}9} = 1004{,}7 \text{ года}.$$

Здесь второе слагаемое уже существенно меньше первого. Значит, минимум величины $t_v + t_n$ можно было бы получить раньше. Например, если спустя $t_v = 300$ лет будет достигнуто $v_4 = 0{,}05c$, то

$$t_v + t_4 = t_v + 4{,}2 \cdot \frac{c}{0{,}05c} = 300 + 84 = 384 \text{ года}.$$

Из этих примеров видно, что посылать корабли к звёздам сейчас бессмысленно, причём не просто потому, что они будут лететь слишком долго, а потому, что корабли, посланные *несколько позже* (на 100-300 лет), достигнут цели *значительно раньше* (на десятки тысяч лет). Не говоря уже о более раннем свершении мечты, мы к тому же получим бóльшую вероятность того, что аппаратура не одряхлеет в пути.

Заметим, что к более далёким звёздам разумнее лететь несколько позже, когда будет достигнута ещё бóльшая скорость.

Казалось бы, с помощью вычислений, подобных приведённым выше, можно узнать точную дату отлёта к любой звезде, обеспечивающую минимум $t_v + t_n$. Да, если бы мы могли точно предсказать зависимость доступной человеку скорости кораблей от времени работы над их усовершенствованием t_v. В порядке упражнения можете задаться квадратичной зависимостью

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{t_v}{1000}\right)^2,$$

где t_v – в годах. На самом же деле эта функция не будет ни квадратичной, ни линейной, ни экспоненциальной. Помимо общего сравнительно плавного роста, она будет наверняка содержать несколько революционных скачков, предсказать для которых место на оси времени мы не берёмся. И главное, по мере приближения v к c дальнейший прогресс будет осложняться релятивистским увеличением массы.

32. Космический баскетбол

А

Два космонавта вышли из корабля поразмяться с баскетбольным мячом. (Как относится к такой игре спортивная космическая медицина, автору не известно.) Играют они по упрощенным правилам: перебрасываются мячом, пока один из них не удалится от корабля на некоторое «штрафное» расстояние, означающее проигрыш. Пользоваться двигателями нельзя до окончания игры. Опишите ход игры и определите, могут ли такие правила игры считаться справедливыми.

Б

Не во всякой игре тузы выигрывают!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 71*а*

Правила игры несправедливы, если выигрывают не за счёт спортивных качеств (силы, ловкости, сообразительности), а за счёт какого-либо отклонения физических данных: роста, веса и т.д. Например, если бы на ринге (ковре, помосте) допустили к соревнованию между собой боксеров (борцов, штангистов) различных весовых категорий, то это было бы несправедливо по отношению к атлету более лёгкого веса.

В

Итак, игроки заняли исходные позиции в одном метре от корабля и друг от друга. Судья – в корабле. Свисток! – и спортсмены… остаются на местах, так как в вакууме звук не распространяется.

Разумеется, это шутка. Судья подаёт световой сигнал (или же свисток по радио). Первый игрок бросает мяч в сторону партнёра и… оказывается в проигрыше, так как сила реакции отбрасывает его в противоположную сторону, к штрафному рубежу[1]. Достаточно второму игроку уклониться от мяча, как первый терпит пора-

[1] Бросив, например, мяч массой 1 кг со скоростью 10 м/с, космонавт массой 100 кг полетит в противоположную сторону со скоростью 0,1 м/с (точнее, относительно судьи мяч полетит со скоростью 9,9009900… м/с, а космонавт – в обратную сторону со скоростью 0,0990099… м/с).

жение. Итак, за право первого броска бороться не стоит. Ну, что ж, судьбу первого броска, как и на Земле, можно решить жребием, только космическое счастье противоположно земному.

Впрочем, сумеет ли противник уклониться от мяча? Ведь пользоваться двигателем запрещено, а без двигателя спортсмен не может уйти в сторону, он может только изогнуться. И если вы бросили в него мяч без промаха, то удар мяча придаст сопернику приблизительно такое же количество движения, какое первому придал бросок, при условии, что противник схватил мяч. Если же мяч отскочил от него обратно, то количество движения, переданное противнику, будет даже вдвое больше! Следовательно, противник должен во что бы то ни стало поймать летящий в него мяч, иначе он проиграл: удаляясь со скоростью, вдвое большей, он выйдет в аут первым! Игра приобретает спортивный интерес.

Мяч пойман. Что делать: бросать его или держать? Если бросать, то поточнее: промах равносилен поражению, так как приводит к удвоению скорости бросившего и не прибавляет скорости первому игроку. А если не бросать? Тогда у второго сохраняется преимущество, полученное на старте: первый игрок начал удаляться раньше на $0{,}1$ с (время пребывания мяча в полёте $t = 1\text{ м} : 10\text{ м/с} = 0{,}1\text{ с}$). Хватит ли этого преимущества для победы? Вполне хватило бы, если бы оба игрока после первого броска удалялись с одинаковыми скоростями (относительно корабля).

Позвольте, а почему скорости неодинаковы? Ведь мяч встретился со вторым игроком в точности с той же скоростью, с какой расстался с первым? Нет, ко второму игроку он пришёл со скоростью $10 - 0{,}1 = 9{,}9\text{ м/с}$, хотя относительно первого его скорость равна 10 м/с (ведь первый уже удаляется со скоростью $0{,}1\text{ м/с}$). Это даёт второму дополнительное преимущество: схватив летящий в него мяч, он приобретёт скорость только $0{,}098\text{ м/с}$. Но может быть и другая причина неравенства скоростей: массы обоих игроков могли оказаться разными, и тогда игрок с меньшей массой приобрёл бы бóльшую скорость. Следовательно, игра несправедлива: выигрывает более массивный (правда, может выиграть и легковес, но за счёт неспортивного поведения: он должен словчить и прихватить с собой в карман груз поувесистее).

Впрочем, в земном баскетболе тоже мало справедливости. Правда, там масса даёт мало преимуществ, но зато их определяет такой далеко не спортивный фактор, как рост. Команда баскетболистов среднего роста проиграет команде рослых игроков того же спортивного класса. Пора бы осознать законодателям баскетбола, что людей среднего роста нельзя считать неполноценными, что они тоже хотят быть чемпионами – в своей «ростовой категории».

Вернемся, однако, с грешной земли на небо. Чтобы пресечь злоупотребления и уравнять шансы игроков, нужно перед началом состязания уравнять их массы. Такое дополнение к правилам делает игру более справедливой[1]. А если дополнить их ещё условием, что игрок не имеет права держать мяч, допустим, более 5 с, то второй игрок лишается преимущества, накопленного в начале игры: бросая мяч первому, он увеличивает свою скорость. Однако до справедливости ещё далеко. Второй игрок может соблюсти правила, но бросить мяч с такой малой скоростью, что тот не ока-

[1] Для полной справедливости массу первого игрока следовало бы сделать большей (добавить в карман массу мяча), чтобы компенсировать те потери, которые он будет нести на протяжении всей игры: ведь в каждой новой паре бросков его бросок будет первым, т.е. менее выгодным.

жет на него сколько-нибудь заметного воздействия (и, разумеется, не долетит до первого игрока). Более того, второй может схитрить: бросить мяч в противоположную сторону. Этим он остановит собственное движение и предоставит первому игроку верный проигрыш. Нужно ввести ещё два правила: скорость мяча относительно бросающего должна быть не меньше, например, 5 м/с, угол отклонения траектории мяча от направления на противника не должен превосходить, допустим, 10°. Как видите, чтобы следить за соблюдением правил, судье понадобятся уже локатор и вычислительная машина.

А ещё нужно расположить игроков так, чтобы прямая, их соединяющая, была перпендикулярна направлению на Солнце. Тогда мяч для каждого из игроков будет выглядеть одинаково (полумесяц). Иначе для одного из игроков мяч будет представляться узким серпом, а остальное будет чёрным, как космическое небо, и поэтому почти невидимым (эффект покрытия мячом звёзд и обратный эффект освещения мяча отражённым от корабля и космонавтов светом невелики). Для второго же игрока чёрным будет только серп, а остальное – ярким, что несправедливо.

Итак, в этой игре, по-видимому, проиграет тот, кто промахнётся или не сумеет схватить идущий на него мяч. Ну, а если игроки бросают мяч без промаха? После каждого броска относительная скорость разбегания игроков возрастает. В конце концов, она станет настолько большой, что сравняется с той скоростью, какую игроки способны придать мячу. Мяч «выбывает из игры»: при очередном броске он останется в поле, не в силах достичь адресата. На каком броске это случится? На сотом? Так кажется только невнимательному читателю, считающему, что если от первого броска игрок приобрёл скорость 0,1 м/с, то 10 м/с он наберёт за сто бросков (по 50 бросков с обеих сторон). Если бы это было так, то достаточно было бы с обеих сторон по 25 бросков: ведь каждый бросок увеличивает скорость обоих игроков. Но это не так: каждый последующий бросок придаёт игрокам всё меньшую добавку скорости, так как скорость разбегания игроков растёт, и мяч, бросаемый с одной и той же скоростью относительно бросающего, будет достигать принимающего каждый раз с меньшей скоростью, что затянет процесс теоретически до бесконечности.

На практике игра не бесконечна: она закончится на том броске, скорость которого случайно окажется меньше требуемой (из-за неумения игроков выдерживать постоянство скорости бросания). Впрочем, может оказаться, что игра наскучит ещё раньше: игроки разлетятся на большое расстояние, мяч в полёте будет находиться утомительно долго, а там, смотришь, произойдёт промах, после которого придётся прекращать игру, включать двигатели и догонять мяч[1].

Любопытно познакомиться с техникой броска. Прежде всего, в невесомости мяч между игроками летит равномерно и прямолинейно (относительно игроков, но не

[1] Любопытно, что в игре спортсмены могут только удаляться друг от друга. Сблизиться за счёт перебрасывания мячом невозможно. И только если игроков много, то некоторые из них могут сблизиться за счёт бросков крайним игрокам, которые будут удаляться. Если же перебрасываться как попало, то разлетится вся команда. Именно так разлетаются молекулы газа, выпущенного в вакуум (правда, у них нет мячика, они сами играют роли мячиков и игроков).

Заметим, что если игроками равномерно заполнена вся Вселенная, то с помощью мяча они могут собраться в любые по размерам группы, но только не в одну.

И, наконец, космогонический нюанс: если группа будет очень большой, то за счёт взаимного тяготения игроки своими телами образуют планету или звезду, отчего им не поздоровится.

относительно Земли)[1]. Значит, земные параболы и баллистические кривые нужно забыть, и чем скорее, тем лучше для игры. Прицеливаться в игрока нужно без всяких поправок на криволинейность полёта. Но если вы для удобства прицеливания будете бросать мяч с уровня глаз, то будете наказаны: в момент броска ваше тело придёт во вращение, ногами вперёд. Вы увидите Вселенную вращающейся вокруг вас. Это весьма лестное для вас обстоятельство помешает, однако, следить за партнёром, принимать от него мяч и правильно его отпасовывать. Кроме того, не известно, какую штуку при этом выкинет ваш вестибулярный аппарат и как долго он позволит вам безнаказанно считать себя центром Вселенной.

Чтобы избежать вращения, мяч нужно бросать так, чтобы ваш центр масс был на продолжении траектории полёта мяча. Не забудьте, что если в момент броска ваши ноги были поджаты, то центр масс переместился из области живота ближе к груди.

Ну, а если вы ловите мяч? Вряд ли партнёр попадёт мячом точно в ваш центр масс. Удар придётся где-то в стороне, и вы начнёте вращаться. Чтобы остановить вращение, вызванное попаданием мяча в голову, вы должны бросить противнику мяч от колен.

Между прочим, вращение игрока при нецентральном ударе можно использовать для победы. Если часть энергии мяча тратится на вращение игрока, то, следовательно, на поступательное движение остаётся меньше.[2] А ведь только поступательное движение может увести игрока за штрафную линию. Таким образом, выигрывает тот, кто последним броском приведёт себя в наибольшее вращение, причём попадёт мячом в противника так, чтобы остановить вращение последнего. Несомненно, такая виртуозная игра доставит болельщикам много весёлых минут.

Не забудьте только перед выходом в космос убавить давление воздуха в мяче, а то он может лопнуть ещё в шлюзовой камере.

33. Космический вальс

А

Предыдущая задача убедила нас, что для спортивных игр космос является вполне подходящим местом. Ну, а для танцев? Представим, что из корабля вышли девушка и юноша и с помощью двигателей заняли исходную позицию: лицом к лицу, держась за руки, неподвижно относительно корабля (без поступательного перемещения и без вращения). Музыка играет медленный вальс. Как велики возможности, предоставляемые космосом для танца? Какие па и фигуры можно сделать? Сумеют ли

---

[1] Если размеры космического стадиона не очень велики, то можно пренебречь теми тонкостями, на которых основана задача «Человек за бортом!».

[2] Вращение, в силу закона сохранения импульса, не оказывает влияния на движение центров масс игроков, которое только и определяет исход игры. От него можно отвлечься. Можно считать, что игроки и мяч всё время находятся на одной прямой, принимаемой далее за ось X. Общий центр масс игроков и мяча остаётся неподвижным. Пусть он совпадает с центром «поля», на котором совершается игра. В силу теоремы о движении центра масс $Mx_1 - Mx_2 + mx = 0$ или $x_1 - x_2 = -mx/M$, где M – масса игрока, m – масса мяча, x_1 и x_2 – координаты игроков ($x_1 > 0$ и $x_2 > 0$), x – координата мяча. Если $x > 0$, то $x_1 < x_2$. Значит, если первый игрок выиграл, то в момент выигрыша мяч будет находиться на его половине. То же относится ко второму игроку.

танцующие кружиться? Разумеется, двигатели на время танца выключены, чтобы не обжечь бальный скафандр партнёра.

Б

Любители танцев относятся к этой задаче оптимистично: дескать, выпустите только нас на орбиту, а там мы вам покажем такое, что у вас зарябит в телевизорах.

Любители физики намного пессимистичнее. Ну какие тут танцы? Кружиться невозможно: закон сохранения момента количества движения не позволяет. Пройтись из конца в конец по танцплощадке нельзя: нет опоры, не от чего оттолкнуться. Даже отпустить руку партнёра рискованно: отпустишь – не поймаешь! Привязаться друг к другу фалом? Не эстетично!

Прежде всего отметим, что в земных танцах фал как средство соединения партнёров используется давно и широко. Правда, под другими названиями: шарф, лента, платочек. Поэтому фал из нейлоновой ленты вполне уместен и в космическом танце.

Солистке в космическом танце действительно вроде нечего делать: кружиться и передвигаться она без двигателей не сможет. Почему же на Земле она всё это может делать? А потому, что если разобраться, как следует, то на Земле солистка всегда выступает фактически в дуэте: в качестве партнёра ей служит земной шар. Вращаться она может только потому, что заставляет земной шар вращаться в противоположную сторону, отталкиваясь – отталкивает и его, притягиваясь – притягивает. Действие равно противодействию! Правда, земной шар – особый партнёр: он очень массивен, а поэтому малоподвижен и служит надёжной опорой для солистки. Кроме того, у него большие и сильные руки – сила притяжения, – поэтому нет опасности, что балерина, отделившись от Земли, в дальнейшем к ней не вернётся.

Космический партнёр менее массивен. Но это не принципиальное отличие, а только количественное. Следовательно, наличие партнёра в космосе позволяет принципиально осуществить, так или иначе, все земные фигуры сольного танца. Анализируя их, имейте в виду, что живой партнёр участвует в танце сознательно и поэтому может сделать многое из того, что не может сделать земной шар.

В

Всякий необходимо причиняет пользу, употреблённый на своём месте. Напротив того: упражнения лучшего танцмейстера в химии неуместны; советы опытного астронома в танцах глупы.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 61

Начнём для простоты всё-таки с одиночного танцора в космосе. Его центр масс неподвижен относительно корабля (мчится по той же орбите), и сдвинуть его без внешних сил нельзя. Следовательно, если солист опустит руки (рис. 26*а*), то голова его и корпус приподнимутся так, чтобы общий центр масс остался на месте. Если поднимет руки – корпус опустится. Это «прыжки на месте». Если солист выбросит обе руки влево (рис. 26*б*), то корпус сместится вправо, причём несколько наклонится, так как реакция от рук на корпус приложена на уровне плеч, т.е. выше центра масс.

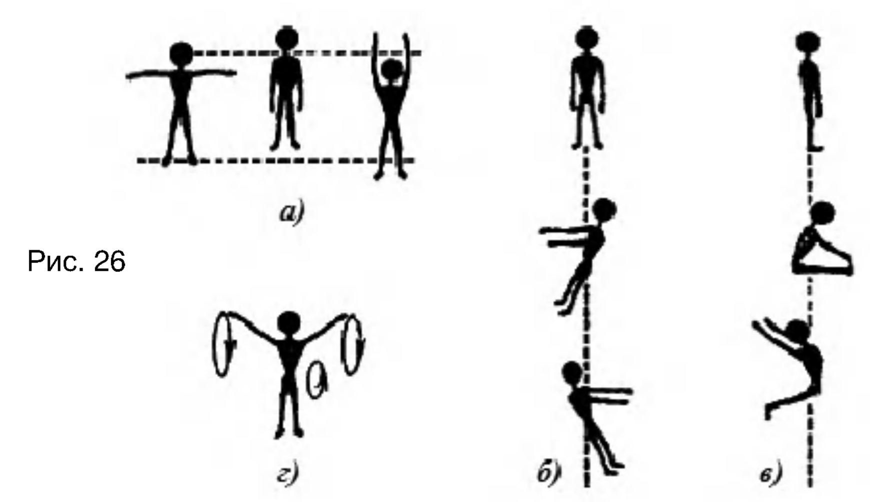


Рис. 26

С помощью мышц корпуса можно «пойти вприсядку» (рис. 26*в*). Если солист приведёт руки во вращение (рис. 26*г*), то его корпус получит медленное обратное вращение. Остановив вращение рук, он немедленно остановится и сам: суммарный момент количества движения рук и корпуса всё время равен исходному, т.е. нулю. А вот если бы он вращал на длинном тросе груз, передавая его, например, из правой руки в левую перед грудью, а из левой в правую – за спиной, а затем отпустил его, то он сохранил бы полученное вращение корпуса (вправо) и приобрёл бы поступательное движение в направлении, противоположном грузу.

Теперь о дуэте. Наличие партнёра неизмеримо расширяет возможности космического танца. Покажем это на нескольких примерах.

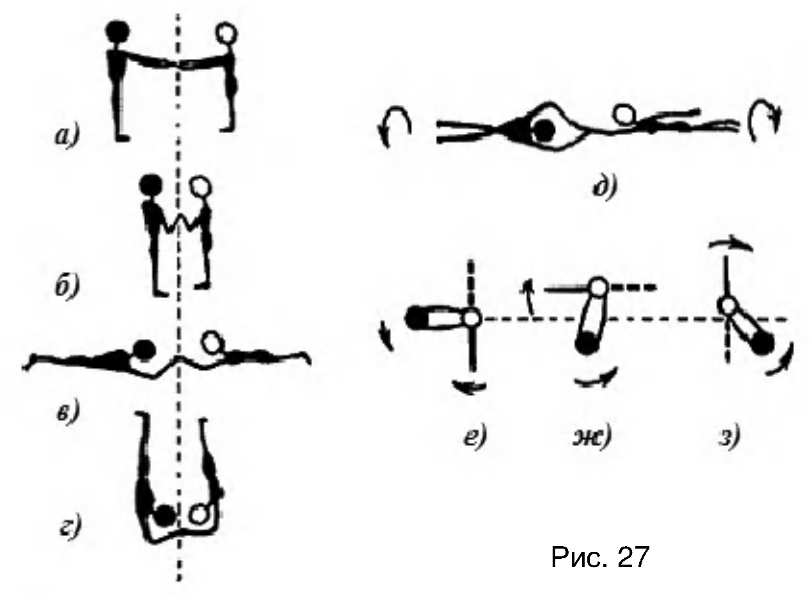


Рис. 27

Из исходной позиции (рис. 27*а*) можно с помощью рук перейти в позицию рис. 27*б*, затем, оттолкнувшись носками от носков, – в позиции рис. 27*в* и рис. 27*г*, а оттолкнувшись каблуками от каблуков, – вернуться обратно. Впрочем, всё это можно выполнить и без отталкивания, за счёт мышц рук, только более медленно. Можно также зафиксировать любую из этих позиций.

Главный признак вальса – вращение. Его можно создать за счёт вращения партнёра в обратную сторону. Вращая руку дамы вокруг продольной оси руки (рис. 27*д*), можно привести даму во вращение; при этом кавалер будет вращаться в противоположном направлении. На рис. 27*е,ж,з* (вид «сверху») показано типичное вальсообразное вращение. Кавалер (чёрный гермошлем) переносит руки на талию дамы (белый гермошлем) и поворачивает её по часовой стрелке. При этом он сам начинает

вращаться вокруг общего центра масс против часовой стрелки (для наглядности левая рука дамы показана сплошной прямой, правая – пунктирной). В фигуре рис. 27*д* можно отпустить руки и вращаться отдельно. В фигуре рис. 27*е* этого сделать нельзя: силы инерции заставят партнёров удаляться друг от друга.

Для совместного вращения[1] в одну сторону необходимо, чтобы хотя бы один из партнёров имел вращение в исходной позиции. Если партнёры соединены шарфом и один из них бросит какой-нибудь груз в направлении, перпендикулярном к шарфу, то сам он начнёт двигаться в противоположном направлении, благодаря чему пара начнёт вращаться вокруг общего центра масс. Сближаясь с помощью шарфа, танцующие будут увеличивать скорость вращения, расходясь – уменьшать. При этом Вселенная также будет участвовать в танце, вращаясь в обратную сторону то быстрее, то медленнее. Если вращения не было, то, потянув легонько шарф на себя, оба партнёра могут смело выпускать его из рук, так как теперь они будут сближаться сами собой.

В качестве элемента танца можно использовать и свободный полёт партнёра с посылаемым ему вдогонку «лассо» – концом шарфа (рис. 28*а*).

На рис. 28*б* показана группа из четырёх человек. Кавалеры *Б* и *Г* потянули за шарфы, соединяющие их с дамой *А*. В результате они сами двинулись в точку *А* (по стрелкам), а дама *А* – по равнодействующей – к даме *В*. Встретившись и попарно оттолкнувшись, танцующие разлетаются до натяжения шарфов. Многообразие фигур, образуемых в дальнейшем танцующими, неисчерпаемо, особенно если усилия, прилагаемые к шарфам, менять от фигуры к фигуре.

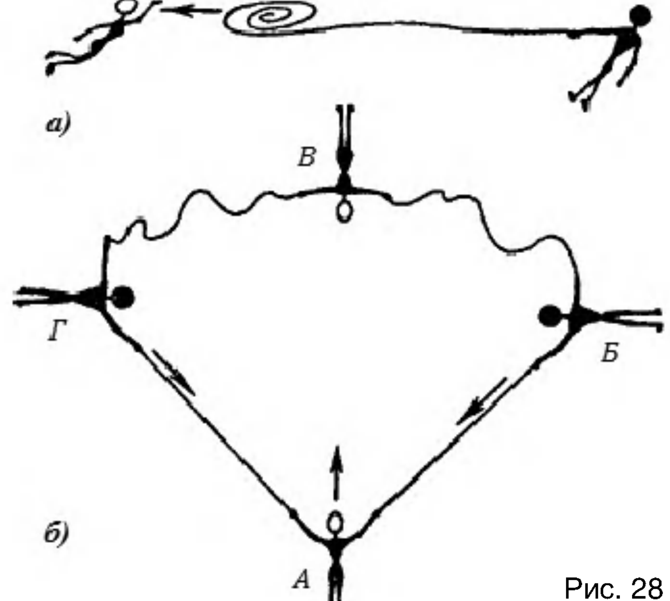


Рис. 28

Автор – не очень крупный специалист по танцам, поэтому он описал, возможно, не самые грациозные фигуры. Однако нет сомнения, что космос даёт в руки балетмейстера много интересного материала.

Можно быть уверенным, что в будущем танцы в космосе будут пользоваться не меньшим успехом у телезрителя, чем сейчас танцы на льду.

34. Радиолуч с Луны ищет Землю

А

Представим, что вы участвуете в проектировании автоматической лунной обсерватории, которая должна прилуниться где-то в районе кратера Птолемей. После мягкого прилунения обсерватория должна направить в сторону Земли антенны, фо-

[1] Прошу извинить за надоедливое повторение слова «вращать»: его синонимы – кружить, вертеть и др. – до некоторой степени легкомысленны, а танец – дело серьёзное, особенно если он – по законам небесной механики.

то- и кинокамеры и многие другие приборы. Таково задание. Вы, конечно, знаете, как это обеспечить: с помощью какой-либо автоматической следящей системы, которая наводится по световым, тепловым или радиосигналам Земли. Это довольно сложная система, которая к тому же потребует источников питания, будет иметь заметные габариты и вес, а всё это на борту обсерватории обходится недёшево.

Кроме того, система может выйти из строя и этим сорвать выполнение задания всей обсерватории.

Нельзя ли обойтись без этой следящей системы и без сигналов Земли и тем не менее ориентировать всё, что требуется, в сторону Земли?

Б

Разыщите на карте Луны кратер Птолемей[1]. Перенеситесь мысленно в этот кратер и отыщите взглядом Землю. Где она? Если и это не помогает, обратитесь за советом к Козьме Пруткову.

В

У человека для того поставлена голова
вверху, чтобы он не ходил вверх ногами.
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 99*а*

Не подумайте, что Козьма Петрович грубиян. Это он даёт вам подсказку, как всегда, в присущей ему изящной и лаконичной манере.

Кратер Птолемей находится в центре видимого «диска» Луны (если смотреть с Земли). Это означает, что если вы окажетесь в этом кратере, то увидите Землю над головой, в зените. Луна обращена к Земле всегда одной стороной. Следовательно, Земля с точки зрения лунного наблюдателя всегда занимает одно и то же положение относительно лунного горизонта, а именно – для упомянутого кратера она всегда в зените. (Строго говоря, в центре видимого диска Луны находится не кратер Птолемей, а так называемый Срединный залив Океана Бурь, но автор боится, что на тех картах Луны, которыми вы располагаете, название этого залива отсутствует, и поэтому называет ближайший к нему крупный кратер, наверняка отмеченный на всех картах.)

Итак, Земля в зените. Причём всегда в зените. Ну, а как навести какую-либо ось в зенит, вы должны сообразить. На Земле на это способен элементарный инструмент – отвес. Чтобы нацелиться фотоаппаратом с Луны в зенит, на Землю, нужно укрепить на одном конце стержня фотоаппарат *Ф*, а на другом – противовес *П* и подвесить стержень на шарнире *А* (рис. 29) так, чтобы он мог поворачиваться в двух плоскостях. Тогда сила лунного тяготения $P_Л$ заставит противовес опуститься в самое нижнее положение, отчего стержень *ПФ* будет ориентирован фотоаппаратом в зенит.

Рис. 29

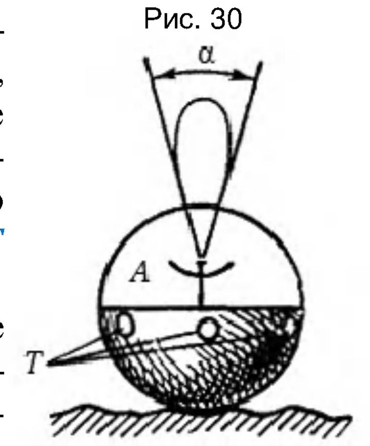
Рассмотренная система наведения несовершенна. Прежде всего, противовес является инертной массой, не приносящей другой пользы, кроме наведения фотоаппа-

[1] Для тех, у кого нет карты Луны: этот кратер находится в центре видимого диска Луны.

рата на Землю. И хотя это само по себе уже немало, но можно потребовать от него ещё больше. Ведь не обязательно, чтобы противовес был обычной гирей. Его роль может выполнить любой полезный груз. Если, например, роль противовеса поручить телевизионной передающей камере, объектив которой смотрит перпендикулярно к стержню, а на другом конце стержня укрепить остронаправленную антенну[1], то мы получим готовую систему для телевизионной передачи на Землю лунных пейзажей.

Показанное на рис. 29 устройство некомпактно. Можно представить себе иную конструкцию обсерватории – в виде известной игрушки «ванька-встанька», которая из любой ситуации выходит с высоко поднятой головой[2].

Рис. 30



На рис. 30 показана шарообразная станция, верхняя половина которой прозрачна для радиоволн и содержит антенну A, а нижняя половина заполнена аппаратурой и поэтому тяжелее верхней. Такой шар можно выбросить на Луну (последней сту-ступенью ракеты) в любом положении, однако он неизбежно сам направит антенну A в зенит, а телевизионные объективы T – в горизонтальную плоскость.

Вставляя «ваньку-встаньку» в пустое полушарие, гладкое внутри и шиповатое снаружи, можно усовершенствовать систему так, чтобы и на склоне лунного холма она устанавливалась антенной в зенит.

Гравитационная система ориентации обладает одним уникальнейшим свойством: «ванька-встанька» может утонуть в океане пыли (или воды), тем не менее даже там, на многокилометровой глубине, он развернётся головой в зенит, так как принцип его действия опирается на силу лунного тяготения, которую ничто не может замаскировать. Любая другая система ориентации (световая, радиотехническая, тепловая, рентгеновская) в этих фантастически трудных условиях отказала бы, так как никакой сигнал с Земли (разумной интенсивности) не достигнет дна океана пыли. Однако это преимущество, по-видимому, не имеет практического значения, так как, во-первых, исследования Луны всё более склоняют учёных к мысли, что океанов пыли там нет, и, во-вторых, сигнал со дна океана пыли вряд ли пробился бы наружу, несмотря на то, что антенна будет ориентирована вверх.

Какой ширины (α на рис. 30) должен быть радиолуч, чтобы наша система бесперебойно поддерживала связь с Землёй? Если бы угол α определялся только угловыми размерами Земли, то луч можно было бы сузить до 1,8°. Такая антенна посылала бы энергию в сторону Земли в 15 000 раз интенсивнее, чем ненаправленная, при той же мощности передатчика. К сожалению, луч придётся взять значительно

[1] Если антенна излучает во все стороны одинаково, то она называется ненаправленной (иногда – всенаправленной). На такой дальней линии связи, как Луна – Земля, ненаправленная антенна неэкономична. Лучше взять остронаправленную, т.е. такую, которая концентрирует излучаемую энергию в узком конусе, в данном случае – в сторону Земли. Это позволит осуществить более помехоустойчивую связь либо уменьшить мощность бортового передатчика.

[2] «Ванька-встанька» был предложен автором для Луны (см., например, «Техника – молодёжи», 1962, № 6), однако, по сообщениям печати (*Барашев П.* На космической верфи – Правда, 19 октября 1967 г.), он нашёл применение и на Венере. Хотя Венера и не обращена к Земле одной стороной, но вращается так медленно, что использование этого способа ориентации в течение ограниченного времени оказывается возможным.

шире. Дело в том, что Луна обращена к нам не строго одной стороной, а слегка покачивается в обеих плоскостях. Эти покачивания называются либрациями.

Либрация по долготе (вправо – влево) происходит потому, что Луна вокруг своей оси вращается строго равномерно, а вокруг Земли – по эллипсу, ускоряя своё движение в перигее и замедляя в апогее. И хотя время оборота вокруг своей оси строго равно времени обращения вокруг Земли (при малейшем неравенстве Луна показывала бы Земле обратную сторону хотя бы раз в тысячелетие), тем не менее, в пределах одного оборота неравенство мгновенных угловых скоростей имеет место, отчего Луна позволяет земному наблюдателю заглянуть слева и справа немного на обратную сторону. Наблюдатель, находящийся в центре лунного «диска», по этой причине увидит Землю покачивающейся в обе стороны от зенита на $7°54'$ с периодом, равным промежутку времени между двумя прохождениями Луны через перигей – аномалистический месяц (27 сут 13 час 18 мин 33 с).

Либрация по широте вызывается тем, что плоскости лунной и земной орбит и лунного экватора не совпадают. Поэтому Луна земному наблюдателю показывает то северный, то южный полюс. В результате этой либрации Земля будет совершать в небе Луны второе кажущееся колебание в другой плоскости, отклоняясь от зенита в обе стороны на $6°40'$. Период либрации по широте равен промежутку времени между двумя последовательными прохождениями Луны через восходящий узел (т.е. через ту точку своей орбиты, в которой она, пересекая плоскость орбиты Земли, переходит из южного полушария в северное). Этот период называется драконическим месяцем (27 сут 5 час 5 мин 36 с).

Рис. 31

Если бы аномалистический и драконический месяцы были равны, то Земля совершала бы в небе Луны кажущееся движение по небольшому эллипсу. Неравенство двух месяцев приводит к тому, что кривая кажущегося движения Земли становится более сложной. Приблизительное представление об этой кривой даёт рис. 31 (аналогичную фигуру Лиссажу рисует электронный луч на экране осциллографа, когда на две пары его отклоняющих пластин будут поданы два синусоидальных напряжения, имеющих слегка неравные периоды). Под действием либрации центр земного «диска» для лунного наблюдателя совершает движение внутри четырёхугольника со сторонами $15°48'$ и $13°20'$. Диагональ этого четырёхугольника имеет величину около $20°$. Именно такой должна быть ширина радиолуча (его след на небе показан окружностью на рис. 31), если мы хотим, чтобы он всегда захватывал Землю. При этом степень концентрации энергии антенной будет более скромной (≈ 130), но вполне достаточной, чтобы наше изобретение ещё не утратило практического значения.

Всё это хорошо, скажете вы, но где гарантия, что обсерватория прилунится в центре видимого диска Луны? А если она сядет в стороне? Тогда Земля будет не в зените и все наши труды напрасны.

Пусть посадка совершена на расстоянии Δ от центра. Тогда Земля будет отстоять от зенита на угол

$$\varphi = \frac{\Delta}{R_Л} \text{ радиан} = \frac{\Delta}{R_Л} \cdot \frac{360°}{2\pi} \text{ градусов},$$

где $R_Л = 1738$ км – радиус лунного шара.

Современная космонавтика позволяет осуществить прилунение в заданную точку с высокой точностью. Но даже при ошибке $\Delta = 100$ км величина $\varphi = 3°20'$, т.е. ещё мала. Расширяя радиолуч до 27°, мы позволяем обсерватории при высадке ошибиться на 100 км в любую сторону от центра. Радиолуч шириной 27° концентрирует энергию в 70 раз.

Любопытно, что гравитационная ориентация полезна даже тогда, когда обсерваторию запланировано высадить вдали от центра. Пусть, например, прилунение намечено на краю диска, т.е. там, где Земля видна не в зените, а вблизи горизонта. В этом случае антенну на стержне с противовесом надо укрепить так, чтобы её радиолуч был перпендикулярен к стержню. Этим обеспечивается горизонтальность луча. Теперь, чтобы направить его на Землю, достаточно одного мотора, поворачивающего антенну в горизонтальной плоскости. При отсутствии гравитационной системы ориентации Землю пришлось бы искать по обеим угловым координатам с помощью двух моторов.

Не кажется ли вам несколько странным, что мы навели антенну на Землю, не пользуясь никакими сигналами Земли? Значит, можно навестись на что-либо, не имея о нём никакой информации? Так сказать, методом телепатии? Нет, конечно. Мы пользовались информацией о направлении на Землю, но только не прямой (от Земли), а косвенной (от Луны). В следующей задаче этот вопрос вы сможете уточнить.

35. Гантель в космосе

А

На Луне на тонкой прочной нити горизонтально подвешена «гантель» – стержень с двумя одинаковыми массами на концах (рис. 32*а*). Точка подвеса совпадает с центром масс гантели. Отклоните слегка гантель от горизонтального положения (рис. 32*б*) и отпустите её. Какое положение примет гантель?

Б

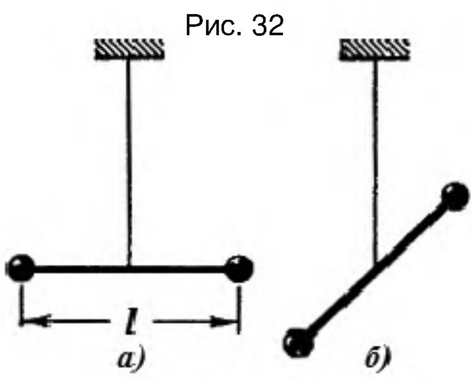


Рис. 32

Обычно отвечают так: поскольку центр масс совпадает с точкой подвеса, то гантель находится в безразличном равновесии. Следовательно, она останется в том положении, в которое мы её установим: в наклонном, горизонтальном, вертикальном. И добавляют, что законы физики одинаковы на Луне и на Земле, а поэтому для постановки этого опыта не обязательно было забираться на Луну.

Согласен, этот опыт можно было бы поставить и на Земле, но только под колпаком, из-под которого откачан воздух, иначе движение воздуха могло бы раскачивать гантель и замаскировать те тонкие эффекты, которые

должны проявиться в этой задаче. Таким образом, в задаче используется не столько Луна, сколько вакуум, существующий над её поверхностью.

Теперь подсказка по существу задачи. Вес и масса – далеко не одно и то же: вес есть произведение массы на ускорение свободного падения. *Обязательно ли центр тяжести совпадает с центром масс?*

В

В горизонтальном положении на две половинки гантели действовали одинаковые ускорения свободного падения (благодаря чему центр тяжести совпадал с центром масс), в наклонном – различные: в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона нижняя половина гантели будет тяжелее верхней, так как она ближе к центру Луны. В результате центр тяжести всей гантели сместится по стержню вниз от центра симметрии (а центр масс, всегда совпадающий с центром симметрии, останется на месте!), и стержень из наклонного положения начнёт всё быстрее и быстрее поворачиваться в вертикальное. С разгону он пройдёт это положение, но затем затормозится и, совершив большое число колебаний, остановится в вертикальном положении, когда энергия его колебаний израсходуется на трение о нить в точке подвеса. Вертикальное положение стержня будет положением устойчивого равновесия, так как центр тяжести займёт самое низкое из всех возможных положений. Горизонтальное же положение было положением неустойчивого равновесия.

Вычислим разницу в силах, действующих на обе половины гантели в момент, когда её стержень, имеющий длину l, уже установился вертикально. Будем полагать, что стержень невесом, а вся масса сосредоточена на его концах. Сила тяготения обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра тяготения (в данном случае от центра Луны):

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{ma_1}{ma_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{(R_1 + l)^2}{R_1^2} = \frac{R_1^2 + 2R_1 l + l^2}{R_1^2}. \quad \textbf{(1)}$$

Здесь P_1 и P_2 – веса́ обеих половинок, a_1 и a_2 – их ускорения свободного падения, R_1 и R_2 – их расстояния от центра Луны.

Примем $R_1 = 1750$ км (несколько больше радиуса Луны) и длину стержня $l = 100$ м. Так как $l \ll R_1$, то третьим слагаемым в числителе формулы можно пренебречь по сравнению с первыми двумя. Тогда формула упрощается:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2} = 1 + \frac{2l}{R_1}.$$

Поскольку и $2l \ll R_1$, то, казалось бы, можно пренебречь и вторым слагаемым. Но если бы мы так сделали, то наша задача полностью исчезла бы: мы пришли бы к равенству $P_1 = P_2$, характеризующему однородное поле тяжести. Наша задача держится именно на наличии второго слагаемого, т.е. на том факте, что поле тяжести неоднородно. После подстановки численных значений l и R_1 имеем

$$\frac{a_1}{a_2} = 1 + \frac{2 \cdot 0{,}1}{1750} = 1{,}000114.$$

Разница в весе невелика (а в исходном наклонном положении она ещё меньше), но в условиях вакуума и слабого трения нити этого достаточно, чтобы повернуть стержень в вертикальное положение.

На Земле ($R_1 \approx 6380$ км) относительная разница в весе была бы ещё меньше, хотя абсолютная (при одной и той же массе гантели) была бы больше, чем на Луне. Интересно, что на Земле, в условиях наличия атмосферы, положением устойчивого равновесия было бы или вертикальное, или горизонтальное положение, в зависимости от плотности материала, из которого сделана гантель. Дело в том, что в этом случае пришлось бы принимать во внимание не только закон Ньютона, но и закон Архимеда. Поскольку плотность атмосферы убывает с увеличением высоты, то на нижнюю половину гантели действовала бы бóльшая сила Архимеда, чем на верхнюю, и это противодействовало бы силам Ньютона. Для стальной гантели положение устойчивого равновесия – вертикальное, для пробковой – горизонтальное (на малых высотах над Землёй, где атмосфера достаточно плотна).

Разумеется, в условиях атмосферы эти силы из-за своей малости не могут дать о себе знать, так как силы трения о воздух и особенно силы, вызванные перемещениями воздуха, существенно больше. Однако это не значит, что рассмотренные здесь явления не имеют практического значения. Ведь существует среда, в которой нет ни ветра, ни воздуха вообще и в которой гантель может быть «подвешена» без нити. Это космическое пространство. Если на экваториальную орбиту вывести спутник, имеющий форму гантели, то на ближнюю к Земле половину спутника будет действовать большее ускорение свободного падения, чем на дальнюю, отчего спутник должен установиться стержнем по направлению к центру Земли и сохранять такую ориентацию вечно (рис. 33*а-г*). Практическое значение такой ориентации состоит в том, что на ближнем к Земле конце гантели можно укрепить фотоаппарат, телевизионную камеру, и они будут всё время направлены на Землю, что позволит вести из космоса непрерывный репортаж о нашей планете (например, о состоянии облачности на всём земном шаре). Можно укрепить остронаправленную антенну.

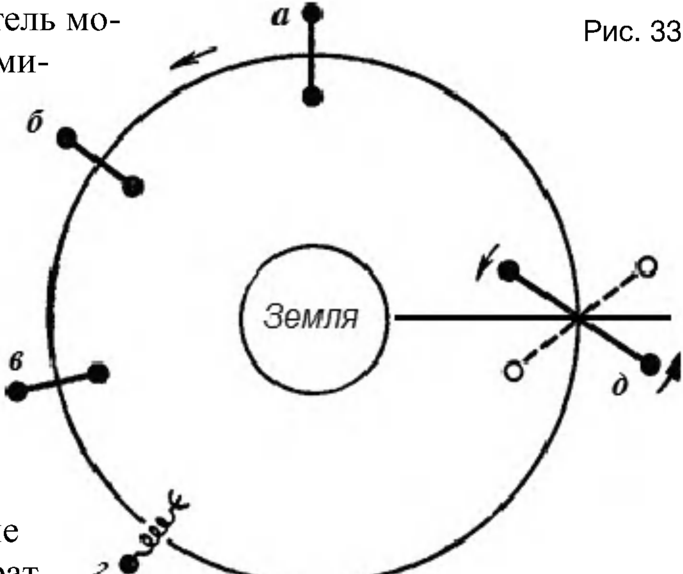


Рис. 33

В космосе стержень гантели может быть очень тонким (струна): на орбите благодаря невесомости стержень будет растягиваться не всем «весом» гантели, а только разницей в силах тяжести, действующих на обе половинки гантели. Это позволяет удлинить «стержень» вплоть до километров, что увеличивает разницу в силах тяготения на его концах.

Как мы уже видели раньше, гантель, прежде чем занять устойчивое вертикальное положение, совершает вокруг него постепенно затухающие колебания. Спутник-гантель тоже будет колебаться[1] вокруг прямой, соединяющей его с центром Земли (рис. 33*д*). Но затухнуть сами собой эти колебания не могут: в космосе нет трения. Как же их потушить? Для этой цели предложено несколько вариантов. Один из них состоит в том, чтобы вместо стержня соединять две половины спутника пружиной

[1] С периодом, близким по величине к периоду обращения вокруг Земли и почти не зависящим от размеров и формы гантели.

(рис. 33*г*). Колебания спутника вызовут переменные центробежные силы, которые заставят растягиваться и сжиматься пружину, отчего энергия колебаний постепенно израсходуется на разогрев пружины, и колебания прекратятся. Точно так же будут погашены колебания, вызванные ударами о спутник космических пылинок.

Заметим, что у Земли давно уже существует спутник-гантель. Это Луна. Она не совсем шарообразна и этим чуть-чуть напоминает гантель: всегда направлена на Землю своей большой осью. Её вращение и колебания были заторможены трением приливов, вызываемых в лунной коре тяготением Земли. И Луна ориентировалась на Землю своей большой осью[1]. А уж потом мы (в предыдущей задаче) ориентировали радиолуч вдоль этой большой оси с помощью тяготения Луны.

Для тех, кто ещё не потерял интереса к задаче, предлагаем доказательство того, что центр тяжести гантели, подвешенной на нити на Луне, при колебаниях перемещается по окружности.

Пока гантель была в горизонтальном положении, ве́са обеих её половин, P_1 и P_2, были одинаковы, поэтому центр тяжести находился на середине стержня, на расстоянии $l/2$ от его концов (рис. 34). При отклонении стержня на угол φ вес нижней части гантели P_1 возрос, вес верхней части P_2 уменьшился. Центр тяжести M есть точка приложения веса тела P, который является равнодействующей весов P_1 и P_2. Точка приложения равнодействующей двух параллельных сил (а они почти параллельны) делит расстояние между точками приложения составляющих на части, обратно пропорциональные этим составляющим:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l/2 + \Delta}{l/2 - \Delta},$$

где Δ – расстояние центра тяжести от точки подвеса.

Рис. 34

Концы гантели при отклонении на угол φ разнесены по высоте на величину h, которая и определяет различие весов P_1 и P_2, как это было показано раньше:

$$\frac{P_1}{P_2} = 1 + \frac{2h}{R_1}.$$

Учитывая, что $h = l\sin\varphi$, и приравнивая две формулы, имеем

$$\frac{l/2 + \Delta}{l/2 - \Delta} = 1 + \frac{2l\sin\varphi}{R_1}.$$

Решаем уравнение относительно Δ. Это даёт

$$\Delta = \frac{l}{2} \cdot \frac{2l\sin\varphi}{2R_1 + 2l\sin\varphi}.$$

Пренебрегая вторым слагаемым знаменателя (поскольку $2l\sin\varphi \ll 2R_1$), получаем окончательно

[1] Впрочем, в последнее время эту ориентацию объясняют эксцентричностью ядра, обнаруженной радиолокационными измерениями движения центра масс Луны.

$$\Delta = \frac{l^2 \sin\varphi}{2R_1}.$$

Для тех, кто знаком с полярной системой координат, уже ясно, что это окружность: ведь полусинусоида в полярной системе координат выглядит, как окружность в декартовых. Для остальных же придётся продолжить доказательство.

Найдём максимальное значение Δ. Как видно из формулы, $\Delta = \max$, если $\sin\varphi = \max = 1$, т.е. если $\varphi = 90°$. Подставляя $\varphi = 90°$, получаем

$$\Delta_{\max} = \frac{l^2}{2R_1}.$$

Отложим $\Delta_{\max}$ вертикально вниз от точки O (рис. 34, отрезок OK) и разделим отрезок OK точкой L пополам, обозначив две половинки OL и LK буквой b:

$$b = \frac{\Delta_{\max}}{2} = \frac{l^2}{4R_1}.$$

Соединим центр тяжести M и точку L прямой $ML = a$. Если нам удастся доказать, что при любом значении φ $a = b = \text{const}$, то это будет означать, что точка M при любом значении φ отстоит от точки L на постоянную величину, т.е. перемещается по окружности. Из треугольника MOL по теореме косинусов

$$a = \sqrt{\Delta^2 + b^2 - 2\Delta b\cos(90° - \varphi)},$$

т.е.

$$a = \sqrt{\frac{l^4\sin^2\varphi}{4R_1^2} + \frac{l^4}{16R_1^2} - 2\frac{l^2\sin\varphi}{2R_1}\cdot\frac{l^2\sin\varphi}{4R_1}} = \sqrt{\frac{l^4}{16R_1^2}},$$

или

$$a = \frac{l^2}{4R_1} = b.$$

Итак, действительно a не зависит от φ, и, следовательно, кривая, по которой движется центр тяжести M, есть окружность, отрезок a – её радиус, а точка L – центр.

Разумеется, размеры окружности на рис. 34 сильно преувеличены. Её диаметр в случае рассмотренной нами лунной гантели равен всего лишь

$$d = \Delta_{\max} = \frac{l^2}{2R_1} = \frac{100\cdot 100}{2\cdot 1\,750\,000} = 0{,}0028\ \text{м} = 2{,}8\ \text{мм}.$$

но при увеличении l в 10 раз d возрастает в 100 раз.

При очень больших l (десятки и сотни километров) приведённые выше формулы перестают быть правильными, так как силы P_1 и P_2 становятся заметно непараллельными и, кроме того, в формуле **(1)** нельзя уже будет пренебречь и третьим слагаемым. Не учитывая этого, мы при $l = 5000$ км получили бы $d \approx 7000\ \text{км} > l$, что означало бы, что центр тяжести вышел за пределы длины гантели. Это абсурд.

36. Детективно-астрономо-филателистический сюжет

А

Филателисты высоко ценят марку, имеющую какую-либо особенность. Например, надпечатку (поправку, внесённую уже после изготовления марки, но до её по-

ступления в обращение). Перед вами – одна из марок с надпечаткой (рис. 35). Её официальное название «На Луне». Однако после точки видна буква «В» – начало какого-то дополнения к названию, запечатанного так, чтобы надпечатку можно было принять за теневую деталь на Луне[1].



Рис. 35

С помощью любимого орудия Шерлока Холмса – лупы – на просвет можно прочесть (на оригинале, конечно, но не в книге) запечатанную фразу: «Восходит Земля» (призываю в свидетели редактора!). Итак, полная надпись: «На Луне. Восходит Земля». И действительно, из-за лунного горизонта выглядывает половина земного шара, и космонавты приветственно машут своей далёкой Матери-Земле. Спрашивается: чем руководствовался тот, кто вычеркнул слова «Восходит Земля», и как поступили бы вы на его месте?

Б

Очевидно, вычеркивавший нашёл слова «Восходит Земля» ошибочными. В самом деле, кто сейчас не знает что Луна повёрнута к нам всегда одной стороной, а обратную сторону удалось впервые увидеть только в 1959 г. – на снимках, переданных на Землю станцией «Луна-3». А если так, то Земля в небе Луны неподвижна и, следовательно, не может восходить и заходить. Видимо, вычеркивавший знал это слишком твёрдо, принимал за абсолютную истину, в то время как это всего лишь первое приближение к ней.

Второе, более точное приближение (тоже, однако, не претендующее на абсолютную истину) вы уже встречали в задаче «Радиолуч с Луны ищет Землю».

В

Для очистки совести отметим, что у одного из наших с вами учителей, Я.И. Перельмана, восход и заход Земли на Луне качественно обсуждался ещё в 20-е годы в книге «Занимательная астрономия». Нам остаётся лишь добавить подробности и подкрепить их цифрами.

Как мы видели в задаче «Радиолуч с Луны ищет Землю», благодаря либрациям Земля относительно горизонта Луны описывает довольно сложную траекторию (рис. 31) в прямоугольнике со сторонами $15°48'$ (запад-восток) и $13°20'$ (север-юг). Если лунная экспедиция высадилась не в центре лунного диска, а на краю, то фигура рис. 31 опустится к горизонту, и космонавты смогут наблюдать восход Земли. Высадка в районе полюса позволяет наблюдать верхнюю (или нижнюю) половину прямоугольника, вблизи экватора – левую (или правую).

На рис. 36 показано загадочное и грандиозное сооружение инопланетян… Виноват, увлёкся! Показано поведение Земли относительно лунного горизонта, если наблюдатель находится недалеко от края диска в средних широтах (поэтому прямо-

[1] Автор благодарит доцента Г.И. Никитина, подсказавшего идею задачи и презентовавшего марку для нашей книги.

угольник рис. 31 здесь повёрнут на угол, равный широте места высадки). Земля показана шариком, время зарисовки – спустя сутки после восхода. Угловые размеры Земли при наблюдении с Луны – порядка 2°. Сейчас она восходит почти вертикально, поднимется примерно на 12° и затем зайдёт в точке горизонта, находящейся на 6-7° правее точки восхода.

Рис. 36

В другие месяцы кажущаяся траектория восхода-захода будет иной. На рис. 36 показаны отрывки траекторий, соответствующие не соседним месяцам, а несколько разнесённым (иначе пришлось бы рисовать траектории гуще). На экваторе от одного восхода Земли до другого проходит аномалистический месяц, т.е. примерно 27 земных суток и 13 часов (см. задачу «Радиолуч с Луны ищет Землю»), на полюсе – драконический месяц (на 8 часов короче). Таким образом, восход Земли и её заход – довольно медленные явления. Если «большая ось» эллипсовидной траектории составляет около 15-20° и весь «эллипс» Земля проходит за 27 суток, то собственный угловой диаметр (2°) она проходит примерно за двое суток (здесь неравномерность кажущегося движения по «эллипсу» учтена на глазок). Такой и будет длительность вертикального восхода (или захода). У наклонного она будет ещё больше.

Разумеется, чем дальше экспедиция углубляется на «невидимую» сторону Луны (удаляется от картины рис. 36), тем глубже под горизонт опускается вся картина, и где-то наступит ситуация, в которой восход Земли невозможен. И наоборот, двигаясь к картине, т.е. от края «диска» к центру видимой с Земли стороны, космонавты будут видеть всю картину движения Земли поднимающейся над горизонтом, и где-то наступит ситуация, в которой Земля вообще перестанет заходить. Промежуточная зона поверхности Луны, в которой Земля восходит и заходит, представляет собой огромное «кольцо» неправильной формы. Ширина «кольца» на экваторе порядка 16°, на полюсах – около 13° (по дуге большого круга), а в средних широтах доходит до 20° (диагональ прямоугольника рис. 31).

Если представить, что любая точка прилунения равновероятна, то шансы увидеть восходы-заходы Земли определяются отношением поверхности «кольца» к поверхности всей Луны. Прямые вычисления поверхности «кольца» очень громоздки, но мы можем вычислить её косвенно, через другие данные, взятые из учебника астрономии. Благодаря либрациям с Земли удаётся наблюдать около 60% поверхности Луны. Следовательно, Землю с Луны увидеть нельзя лишь на 40% лунной поверхности. Там нет восходов-заходов потому, что Земля *никогда не присутствует* в небе. Аналогично, на 40% поверхности Луны (середина видимой стороны) нет восходов-заходов потому, что там Земля *никогда не уходит* с неба. Остальные 20% поверхности Луны и есть площадь того «кольца», где наблюдаются восходы и заходы.

Жаль, конечно, что авторам марки не удалось отстоять слова «Восходит Земля». От этого пострадал смысл изображения, пропала романтика. Словами «На Луне» сегодня нас уже не прошибёшь! А слова «Восходит Земля» для человека, находящегося на Луне (хотя бы мысленно), означают очень многое.

37. Кэйворит

А

В научно-фантастической повести Г. Уэллса «Первые люди на Луне» для космического полёта используется пластина из специального вещества – кэйворита, экранирующего силу тяготения. Уэллс так описывает испытания первого образца кэйворита:

«Печные трубы взлетели на воздух, за ними последовали крыша и мебель… Деревья раскачивались и вырывались из земли… Над нашим кэйворитом давление воздуха сверху прекратилось, воздух же по сторонам кэйворита продолжал давить… Образовался как бы атмосферный фонтан… бьющий в небесное пространство! Через него улетучилась бы вся земная атмосфера!»

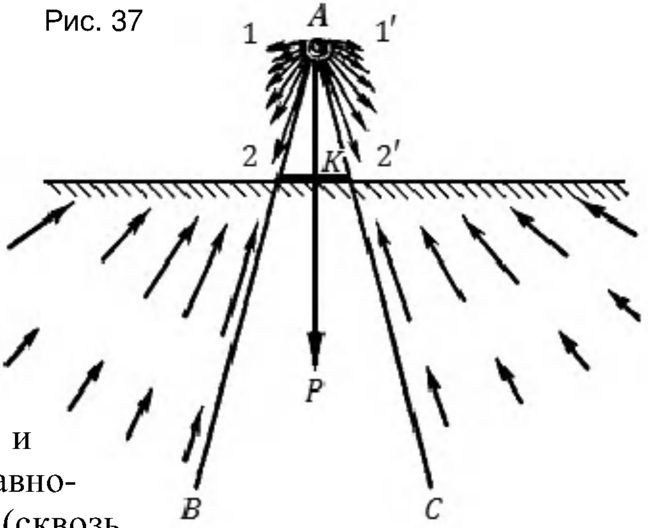
Допустим, что в вашем распоряжении действительно есть лист кэйворита диаметром 5 м, лежащий на земле. Произойдёт ли всё то, что описано Уэллсом?

Б

Нарисуйте все составляющие силы тяготения, действующей на молекулу воздуха, находящуюся на высоте 10 м над лежащим на земле листом кэйворита.

В

Рис. 37



На рис. 37 показан лист кэйворита K и молекула A, висящая над листом. Видно, что молекула A экранирована от той части земного шара, которая находится в конусе BAC, но по-прежнему притягивается остальными частями земного шара. Близкие к горизонту части Земли дают силы 1 и 1′, почти диаметрально противоположные друг другу и поэтому почти полностью компенсирующиеся. Близкие к конусу BAC части Земли дают силы 2 и 2′, почти параллельные друг другу и поэтому при сложении дающие заметную равнодействующую, направленную вертикально (сквозь лист кэйворита!). Стрелки, направленные из-под горизонта к молекуле A, показывают силы, с которыми отдельные части Земли притягиваются к молекуле A в соответствии с третьим законом Ньютона. Итак, экранирование равнодействующей, как это ни удивительно для многих, не равноценно экранированию её составляющих. Здесь особенно отчётливо видна разница между составляющими сил, существующих физически, и их равнодействующей, вводимой в физику как некоторая математическая абстракция, удобная в большинстве случаев, но непригодная в рассматриваемом.

Легко видеть, что для молекул, находящихся на большей высоте (например, 100 м) над листом, экранируемая часть силы тяготения оказывается существенно меньше: конус BAC будет иметь угол при вершине примерно в 10 раз меньше, отчего телесный угол конуса и экранируемая часть земного тяготения уменьшаются при-

мерно в 100 раз. В итоге на высоте порядка 100 м экранирующим действием кэйворита уже практически можно пренебречь.

Таким образом, мнение Уэллса, что «над нашим кэйворитом давление воздуха сверху прекратилось… Образовался как бы атмосферный фонтан… бьющий в небесное пространство», ошибочно. А поэтому ошибочна и вся грандиозная картина катастрофы. Некоторое ослабление веса воздуха будет только на нескольких десятках метров над листом.

Это даёт эффект «тяги» примерно такой же, как у горящего костра, через который, однако, атмосфера не улетучивается в межпланетное пространство и деревья с корнем не вырываются.

Полное экранирование тяготения будет только для молекул воздуха, «лежащих» на само́м листе. Но даже это не означает, что они не будут давить на лист. Лежащая молекула возможна только при абсолютном нуле температуры. При обычных температурах молекулы движутся весьма быстро и давление на препятствие есть результат бомбардировки препятствия быстрыми молекулами. Даже лежащая на кэйворите молекула быстро пришла бы в движение под действием ударов, полученных прямо или косвенно от молекул, движущихся вне конуса экранировки. Поскольку температура воздуха (определяющая скорость молекул) на листе та же, что и вдали от него, то атмосферное давление на кэйворите было бы практически тем же, что и рядом с ним. Ничтожный эффект экранировки как бы размазывается на значительно большее пространство посредством обмена ударами между молекулами.

Можно ли, однако, применить кэйворит для космического полёта, как это сделано у Уэллса? (О возможности изготовления самого кэйворита мы с вами не будем высказываться, чтобы не прослыть ретроградами.) Можно, но для этого нужно использовать его не в форме листа, а в форме кастрюли. Крышку её можно сделать из обычных материалов.

Борта кастрюли будут экранировать её содержимое от тех составляющих силы тяготения, с которыми не справился рассмотренный ранее лист. Если кастрюля герметизирована, то её поведение в воздухе сначала будет напоминать поведение аэростата. Правда, наш аэростат наполнен не гелием, не водородом, а невесомым газом, однако подъёмная сила его лишь незначительно превысит подъёмную силу водородного аэростата. В самом деле, подъёмная сила F для некоторого газа равна *разности* веса воздуха, вытесненного газом, и веса самого газа. Удельная подъёмная сила для водорода

$$F_1 = 1{,}29 - 0{,}089 \approx 1{,}20\ \text{кгс/м}^3 = 11{,}8\ \text{Н/м}^3\,,$$

для невесомого газа

$$F_2 = 1{,}29 - 0 = 1{,}29\ \text{кгс/м}^3 = 12{,}7\ \text{Н/м}^3\,.$$

Правда, скорость подъёма нашей кастрюли будет заметно выше, так как на ней нет тормозящего груза внешней гондолы, да и сама оболочка (кэйворит) ничего не весит. Однако она не будет бесконечно большой: кэйворит экранирует силу тяжести, но не уничтожает массу. Содержимое кастрюли – космонавты, аппаратура и др. – будет той массой, к которой приложена подъёмная сила. Если у обычного аэростата подъёмная сила, например, вдвое превышает вес, то аэростат, если пренебречь аэродинамическим сопротивлением воздуха, будет подниматься с ускорением g (а полная нагрузка на космонавтов – $2g$). Аэростат из кэйворита при прочих равных условиях будет подниматься с ускорением $2g$ (нагрузка на космонавтов – по-прежнему $2g$).

Обычный аэростат остановится на некоторой равновесной высоте (плотность воздуха и подъёмная сила убывают с высотой); аэростат из кэйворита будет подниматься дальше, с меньшим ускорением, но возрастающей скоростью, а за пределами атмосферы будет двигаться с постоянной скоростью по инерции. Разумеется, учёт аэродинамического сопротивления воздуха привёл бы к менее эффектным результатам.

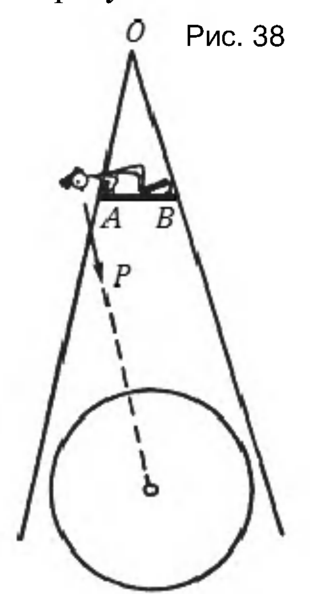


Рис. 38

Поднявшись на высоту, с которой земной шар виден под небольшим углом, можно было бы уже вместо кастрюли обойтись и листом из кэйворита (рис. 38). Теперь он полностью экранирует земное тяготение (в конусе OAB). Однако если вы хотите бросить прощальный взгляд на Землю и для этого высунете голову из конуса (кэйворит непрозрачен!), то голова будет притягиваться к Земле и ваше сооружение под действием силы P перевернётся. Конечно, не составляет труда изобрести стабилизирующие устройства, но этим заняться лучше потом, после изобретения кэйворита (а вдруг он окажется прозрачным для света и высовываться не понадобится!). А удастся ли высунуть голову? Студент Е.С. Сметанников (Мозырь) вполне законно требует соблюдения закона сохранения энергии (но не от Г. Уэллса, а от кэйворита). В конусе тени OAB потенциальная энергия головы (разумеется, речь идёт не о творческом потенциале разума, а о механике) равна той, которая была на старте, так как при подъёме вне поля тяготения (на кэйворите) она не могла возрасти. Высунувшись же, голова вдруг обретает потенциальную энергию, определяемую полем тяготения и высотой. Это парадокс, который разрешается читателем так: граница гравитационной тени кэйворита является энергетическим барьером, на пробивание которого изнутри требуется потратить всё, что мы сэкономили при подъёме, но зато при возвращении в конус вновь приобрели. Это остроумно, но тогда возникает другой парадокс: воздух, в котором поднимается кэйворит, должен засасываться внутрь конуса беспредельно (потенциальная яма!), но не вырываться из конуса (барьер!), а уплотняться и разогреваться (за счёт превращения его потенциальной энергии в кинетическую энергию молекул). Причём у Земли этого не будет, а с ростом высоты этот эффект усиливается. А при спуске на кэйворите в шахту (отрицательная высота) – всё наоборот?

Видимо, что-то важное должно происходить на старте, как только мы заносим ногу на кэйворит. А что? Кем-то сказано: «Всё правдоподобно о неизвестном!» Хорошо сказано. Подождём, повторяюсь, изобретения кэйворита.

III. Летим мы по вольному свету

38. Нас ветру догнать нелегко

А

Припев одной широко известной и вполне хорошей песни о лётчиках гласит:

Летим мы по вольному свету,
Нас ветру догнать нелегко.
До самой далёкой планеты
Не так уж, друзья, далеко!

Если вы умеете ценить музыку, то вы одобрительно отзовётесь об этой песне. Если вы любите стихи, то тоже ничего плохого об этой песне не скажете. А если вы любите физику?

Б

Вы, конечно, сравнили скорость ветра, скорость современного самолёта и скорость, необходимую для достижения «самой далёкой планеты», и сразу же обнаружили резкое несоответствие между ними. Вот результаты вашего сравнения:

1. Скорость самого сильного ветра (ураганного): 30-50 м/с.
2. Скорость современных сверхзвуковых самолётов: 400-800 м/с.
3. Вторая космическая скорость, т.е. скорость, не достигнув которой, нельзя говорить о полётах к другим планетам: 11 200 м/с.

Поэт в одном четверостишии и преувеличил, и преуменьшил скорость самолёта в десятки раз.

В общем, вы, конечно, правы. Но я постараюсь, насколько это возможно, защитить поэта от критики.

Существует литературный приём, называемый гиперболой, что означает преувеличение. Чтобы подчеркнуть какое-либо качество, его преувеличивают. С давних пор всё быстрое сравнивают с ветром, птицей. Позже появились другие гиперболы – сравнения «как пуля», «как метеор». Нетрудно предвидеть, что когда-нибудь в литературу войдёт выражение «быстрый, как фотон», после чего прогресс литературы в этом направлении закончится, так как ничего быстрее фотона поэты не найдут (если не считать сомнительного оборота «быстрый, как мысль»).

В то время, когда появилось выражение «быстрый, как ветер», самым быстрым способом передвижения человека был бег, а по отношению к нему скорость ветра, конечно, была преувеличением. С тех пор многое переменилось. Но литературный язык обязан быть чуть-чуть консервативным – это оберегает его от засорения модными, но скоропреходящими выражениями. Сравнение «быстрый, как ветер» в литературе стало традиционным и уха особенно не режет даже тогда, когда оно относится к явлениям гораздо более быстрым, чем ветер. Очарованные поэтическими достоинствами этой песни, мы не замечаем её *физических* недостатков, хотя слышали её много раз. Конечно, стихи были бы точнее, если бы поэт вместо ветра сумел вставить что-нибудь более быстрое, хотя ещё не известно, обязан ли он быть точным. Впро-

чем, в среднем поэт точен: он ведь сравнил скорость самолёта также и со скоростью космического корабля.

Итак, вам надо продолжить поиски более тяжкого преступления поэта против физики. Чтобы облегчить вашу задачу, можно сократить цитату с четырёх строк до одной:

Нас ветру догнать нелегко.

Ошибка здесь. Ищите!

В

Под сладкими выражениями таятся мысли коварные: так, от курящего табак нередко пахнет духами.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 65

Итак, «нас ветру догнать нелегко»… Иными словами, ветер, хотя и с трудом, но иногда самолёт догоняет. В этом принципиальная ошибка поэта. Известно, что самолёт в состоянии лететь только при условии, что он развил относительно воздуха определённую скорость, при которой набегающий на крыло воздушный поток создаёт достаточную подъёмную силу. Именно для этого самолёт перед взлётом разбегается по земле, причём для того, чтобы поскорее набрать нужную скорость относительно воздуха, самолёт обычно взлетает против ветра (тогда взлёт достигается при меньшей скорости относительно земли и, следовательно, можно обойтись более короткой взлётной полосой).

Ветер не может догнать самолёт, даже если этот самолёт самый тихоходный. Если, например, вдогонку самолёту, имеющему скорость 30 м/с, будет дуть ураганный ветер со скоростью 40 м/с (вполне способный, по мнению поэта, догнать самолёт), то скорость самолёта возрастёт до 70 м/с относительно земли. Относительно же воздуха она останется прежней – 30 м/с, т.е. ураганный ветер будет отставать от самолёта так же безнадёжно, как и штиль.

Если бы ветер догнал самолёт, то скорость самолёта относительно воздуха стала бы равной нулю, а вместе с нею обратилась бы в нуль и подъёмная сила, в результате чего самолёт упал бы.

Иногда в этом месте выдвигается довольно любопытное возражение: если скорость самолёта благодаря урагану увеличилась с 30 до 70 м/с относительно земли, то, следовательно, ураган оказывает всё-таки на самолёт своё воздействие, что и означает, что он догнал самолёт. В таком возражении налицо, прежде всего, смешение двух различных понятий: скорости ураганного ветра (т.е. ветра в данной точке урагана) и скорости урагана (перемещения всего урагана как целого). Первая огромна, а вторая обычно существенно ниже; ураган в принципе может даже некоторое время оставаться неподвижным (сравните с пыльным столбом вихря на дороге). Поэтому ураган и подавно не может догнать самолёт. Увеличение скорости самолёта под воздействием ураганного ветра есть результат того, что самолёт сам влетел в зону урагана, но это уже заслуга самолёта, а не урагана.

Для полной ясности полезно рассмотреть поезд и попутный с ним ветер. Если ветер догонит поезд, то пассажир, выглядывающий в окно, обнаружит полный штиль: шляпа или волосы пассажира даже не шелохнутся (хотя деревья гнутся под

напором ветра), дым от паровоза поднимается вертикальным столбом (хотя дым придорожного костра несётся попутно поезду). Поскольку поезд опирается на рельсы, а не на воздух, то догнавший его ветер не вызовет катастрофы. А самолёт в аналогичной ситуации (если бы она была возможна) должен был бы упасть.

Правда, в атмосфере возможны и такие возмущения, которые способны догнать самолёт (взрывная волна и др.). Однако поскольку эти явления ветром не называются, то они не имеют отношения к нашей задаче.

39. Ветер вдоль…

А

Самолёт летит по замкнутому маршруту Москва – Орша – Москва на побитие рекорда скорости. В течение всего полёта дует ветер по направлению Москва – Орша с постоянной скоростью. Улучшится или ухудшится рекорд из-за ветра?

Б

Если вы считаете, что ветер поможет при полёте в одну сторону столько же, сколько помешает при полёте в обратную сторону, и что поэтому его влияние не отразится на рекорде, то советуем рассмотреть дополнительно случай, когда скорость ветра равна воздушной скорости самолёта. Тогда в Оршу самолёт будет лететь с удвоенной скоростью, а обратно – со скоростью, равной нулю! Таким образом, в этом частном случае время, потребное на преодоление всего замкнутого маршрута, равно бесконечности, что явно больше того времени, которое понадобилось бы при отсутствии ветра.

В

Если самолёт летит по замкнутому маршруту, то, куда бы ни дул ветер, он ухудшит рекорд. Если бы ветер отсутствовал, то время на полёт в одну сторону равнялось бы времени на полёт в обратную. При наличии попутного ветра скорость самолёта относительно Земли (путевая скорость) возрастает, благодаря чему время полёта на первой половине маршрута уменьшается. На второй половине маршрута ветер встречный, путевая скорость уменьшается, время полёта возрастает. Следовательно, ветер помогает полёту *меньшую* часть времени, а мешает – *бо́льшую*. Рекорд будет хуже, чем в отсутствие ветра.

Если ветер дует в обратном направлении, то он будет сначала мешать, а потом помогать. Но общий результат его усилий будет тот же.

Решим теперь задачу количественно. В отсутствие ветра время на весь маршрут

$$t_1 = \frac{2l}{v_с},$$

где $2l$ – полная длина маршрута (туда и обратно), $v_с$ – скорость самолёта (воздушная, а в данном случае также и путевая).

При наличии ветра

$$t_2 = \frac{l}{v_{п1}} + \frac{l}{v_{п2}},$$

где $v_{п1}$ и $v_{п2}$ – путевые скорости при полёте туда и обратно. Если скорость ветра равна $v_{в}$, то

$$v_{п1} = v_{с} + v_{в}\,,\ \ v_{п2} = v_{с} - v_{в}\,,$$

и, следовательно,

$$t_2 = \frac{l}{v_{с} + v_{в}} + \frac{l}{v_{с} - v_{в}} = \frac{l(v_{с} - v_{в}) + l(v_{с} + v_{в})}{v_{с}^2 - v_{в}^2} = \frac{2lv_{с}}{v_{с}^2 - v_{в}^2}\,.$$

Разделив числитель и знаменатель правой части на $v_{с}$, получим

$$t_2 = \frac{2l}{v_{с} - \dfrac{v_{в}^2}{v_{с}}}\,.$$

Сравнение показывает, что $t_2 > t_1$, так как если $v_{в} \neq 0$, то знаменатель последней формулы меньше знаменателя первой, следовательно, вторая дробь больше первой.

Пример: $l = 600$ км, $v_{с} = 300$ м/с, $v_{в} = 30$ м/с. Тогда

$$t_2 = \frac{2 \cdot 600\,000}{300 - \dfrac{30 \cdot 30}{300}} = \frac{4000}{0{,}99} = 4040{,}4 \text{ с}\,.$$

В отсутствие ветра

$$t_1 = \frac{2l}{v_{с}} = \frac{2 \cdot 600\,000}{300} = \frac{4000}{1} = 4000 \text{ с}\,,$$

т.е. продолжительность полёта в отсутствие ветра меньше на один процент.

40. …и ветер поперёк

А

А если ветер дует перпендикулярно к маршруту самолёта? Мешает он рекорду или помогает?

Б

– Ну, уж в этом-то случае на ветер можно не обращать внимания, – убеждённо заявляют многие.

– Нет, если задача поставлена, то в ней что-то есть, – скажут умудрённые опытом.

Действительно, ветер, дующий поперёк, стремится снести самолёт с маршрута. Чтобы лететь по маршруту, лётчик должен развернуть самолёт несколько против ветра. Но тогда ветер для самолёта будет уже не строго поперечным: он станет немного встречным и будет мешать полёту. Попробуйте отразить это обстоятельство векторной диаграммой и вычислить время полёта.

В

На рис. 39 показана векторная диаграмма, поясняющая влияние поперечного ветра на скорость самолёта. В отсутствие ветра самолёт Москва – Орша летит со скоростью $v_{с1}$ (вектор AB). Наличие бокового ветра $v_{в}$ (вектор BC) приводит к тому, что самолёт, продольная ось которого направлена на Оршу, будет фактически лететь в направлении AC (на Могилёв, например) с путевой скоростью $v_{п1}$. Правда, абсо-

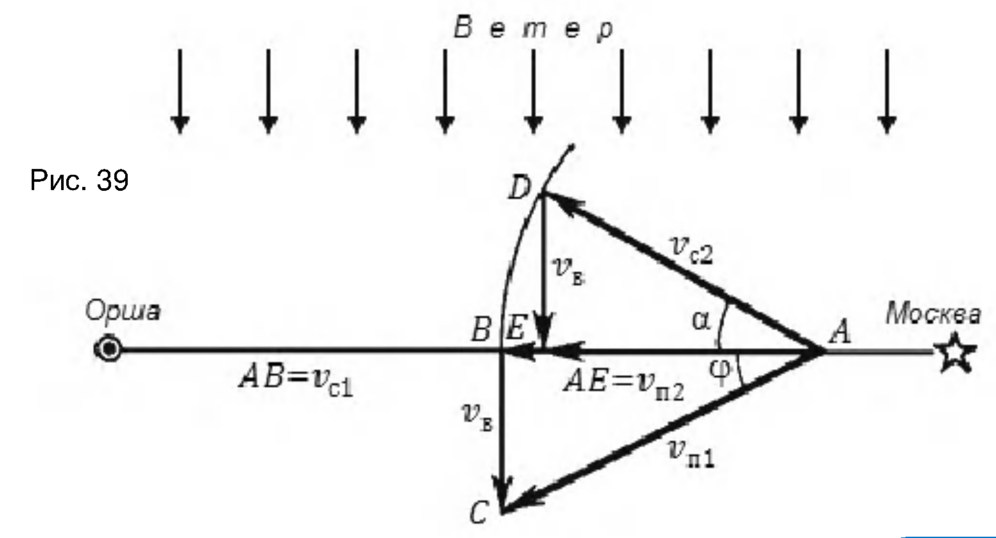


Рис. 39

лютная величина скорости благодаря ветру возрастает ($v_{п1} = \sqrt{v_{с1}^2 + v_{в}^2} > v_{с1}$), но самолёт летит не туда, куда надо. Его сносит влево от маршрута на угол φ (угол сноса). Чтобы лететь на Оршу, самолёт должен развернуться на некоторый угол α против ветра (на Витебск, например). Угол α надо подобрать таким, чтобы с учётом сноса самолёт летел по маршруту, т.е. чтобы результирующий вектор $v_{п2}$ суммы векторов $v_{с2}$ и $v_{в}$ был направлен на Оршу.

При построении чертежа следует помнить, что воздушная скорость самолёта остаётся по величине той же ($AD = AB$, что отражается на чертеже дугой BD, центром которой является точка A). Из чертежа видно, что, несмотря на постоянство воздушной скорости $v_{с}$, путевая скорость при наличии бокового ветра меньше, чем в отсутствие его:

$$AE < AB\,.$$

Заметим кстати, что

$$\sin\alpha = \frac{v_{в}}{v_{с2}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_{в}}{v_{с1}}\,,$$

так как $v_{с1} = v_{с2} = v_{в}$. Поскольку $\sin\alpha = \operatorname{tg}\varphi$, то

$$\alpha > \varphi\,,$$

т.е. самолёт должен развернуться на угол, больший первоначального угла сноса.

Подсчитаем теперь, насколько вреден поперечный ветер.

В отсутствие ветра продолжительность полёта

$$t_1 = \frac{2l}{v_{с}}\,.$$

При наличии ветра

$$t_2 = \frac{2l}{v_{п2}} = \frac{2l}{v_{с}\cos\alpha} = \frac{t_1}{\cos\alpha}\,.$$

Поскольку $\sin\alpha = \frac{v_{в}}{v_{с}}$, то $\alpha = \arcsin\frac{v_{в}}{v_{с}}$, и, следовательно,

$$t_2 = \frac{t_1}{\cos\left(\arcsin\frac{v_{в}}{v_{с}}\right)}\,.$$

Если $v_{с} = 300$ м/с и $v_{в} = 30$ м/с, то

$$\sin\alpha = \frac{30}{300} = 0{,}1\,, \quad \alpha = 5°44'\,, \quad \cos\alpha = 0{,}995\,, \quad t_2 = \frac{t_1}{0{,}995}\,,$$

т.е. поперечный ветер ухудшил время полёта на полпроцента.

Итак, и встречный, и поперечный ветер ухудшает рекорд. Но, может быть, есть такой ветер, который может помочь рекорду? Ведь из чертежа видно, что если не сопротивляться поперечному ветру, то путевая скорость увеличивается ($v_{п1} > v_{с1}$, «полёт на Могилёв»). Может быть, при показанном направлении ветра для установления рекорда лучше лететь не на Оршу, а на Могилёв? Нет, не лучше: на этом маршруте возрастут неприятности на обратном пути.

И вообще, поскольку скорость всякого ветра можно разложить на продольную и поперечную составляющие, а каждая из этих составляющих, как видно из двух рассмотренных задач, мешает полёту, то, очевидно, их сумма также всегда будет мешать установлению рекорда на замкнутом маршруте.

41. Падающее дерево

А

Тонкое высокое дерево спилено под корень и падает (рис. 40). Куда прогибается ствол дерева во время падения: выпуклостью вниз или вверх?

Во избежание запутывания картины посторонними обстоятельствами будем считать, что, во-первых, ствол дерева перепилен полностью, до последнего волокна, и, во-вторых, сопротивление воздуха падающему дереву отсутствует (иначе вас отвлекло бы от русла задачи то, что ветви и листья, составляющие крону, как парашют, поддерживают макушку дерева, и, следовательно, под действием собственной тяжести ствол прогибается вниз).



Рис. 40

Б

Смотри в корень!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 5

– Э-э-э, нас не надуешь! – таков ответ, полученный от многих из тех, кому автор предлагал эту задачу. – Мы знаем, что падающее тело находится в состоянии невесомости. А если ствол дерева ничего не весит, то отчего он будет прогибаться? Тем более что в отсутствие атмосферы состояние невесомости у падающего предмета идеально!

Такой ответ является слишком поспешным. Только *свободно* падающее тело находится в состоянии невесомости, а спиленное дерево не является свободно падающим, так как оно (смотри в корень!) опирается комлем[1] на пень или на землю.

В

Представим себе, что комель падающего дерева прикреплён к пню шарниром, вокруг которого дерево при падении вращается. И пусть там, куда дерево собирает-

[1] Комель – прилегающая к корню часть дерева.

ся упасть, земли нет, так что ствол, пройдя через горизонтальное положение, продолжает вращаться дальше. Это позволяет нам рассматривать его как маятник. А поведение маятника нам хорошо известно. Представим теперь вместо ствола множество математических маятников 01, 02, 03, ..., 08 различной длины, каждый из которых закреплён в одной и той же точке подвеса 0 (рис. 41). Как вы знаете, математический маятник представляет собой точечную массу, подвешенную на невесомом стержне. Для такого маятника известно, что период его колебания тем больше, чем длиннее маятник. Самый короткий маятник 01 будет иметь самый короткий период колебания, каждый последующий – более длинный период.

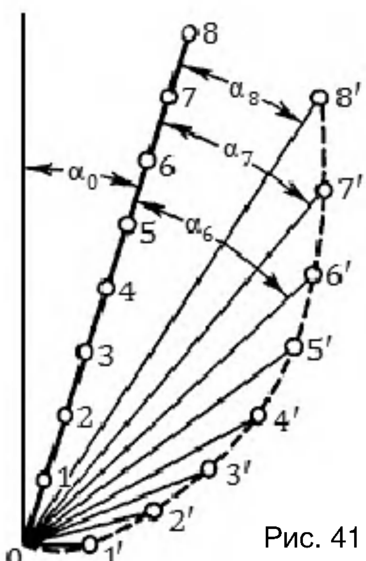


Рис. 41

Пусть вначале все маятники составляют одинаковый угол α_0 по отношению к вертикали. Освободим все маятники одновременно и сфотографируем их через промежуток времени, за который маятник 08 успеет повернуться на заметный угол α_8. Поскольку период колебания маятника 07 короче, то за этот же промежуток времени он повернётся на больший угол α_7. Угол поворота α_6 маятника 06 ещё больше, и т.д. В результате маятники на снимке расположатся по кривой $01'2'3' \dots 8'$, которая выпуклостью обращена вниз.

Теперь ясно, что целый ствол также будет падать выпуклостью вниз, только силы упругости, связывающие отдельные «маятники» воедино, будут стремиться выпрямить кривую, отчего прогиб будет значительно меньше показанного. При падении тонкого высокого ствола этот прогиб отчётливо заметен.

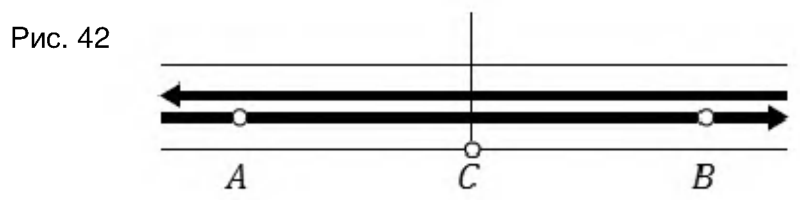
Если дерево, падая, заденет соседнее или начнёт падать до того, как ствол будет перепилен полностью («с хрустом»), то на рассмотренный прогиб наложатся колебания, постепенно затухающие. Казалось бы, что эти колебания должны возникнуть и при полном перепиле из-за того, что, пока дерево стояло, оно было сжато (а то и согнуто) собственной тяжестью, а начиная падать – освобождается от напряжения. Так было бы, если бы весомость с дерева снималась мгновенно. Так бывает в электрическом колебательном контуре, если его мгновенно подключить (или отключить) к источнику э.д.с. (ударное возбуждение контура). Но падающее дерево разгружается от весомости (и разгружает пень) постепенно, при этом колебания не возникают.

42. Две трамвайные остановки

А

На рис. 42 схематически показана улица и две трамвайные остановки *A* и *B*. Все жители этой улицы работают на заводе, к которому трамваем надо ехать направо. Естественно, каждый пользуется той трамвайной остановкой, с которой он быстрее попадёт на работу. Сегодня туман, и спешащие на трамвай не видят, какие номера трамваев подходят к остановкам в данную минуту. Покажите, где живут те, кто пой-

Рис. 42



дёт на остановку A. Иными словами, вам надо найти на улице такую точку C, чтобы жителям, живущим левее неё, было выгодно идти на остановку A, а правее – на остановку B.

Б

– Каждый пойдёт к той остановке, которая ближе. Значит, точку C надо поставить на полпути между A и B.

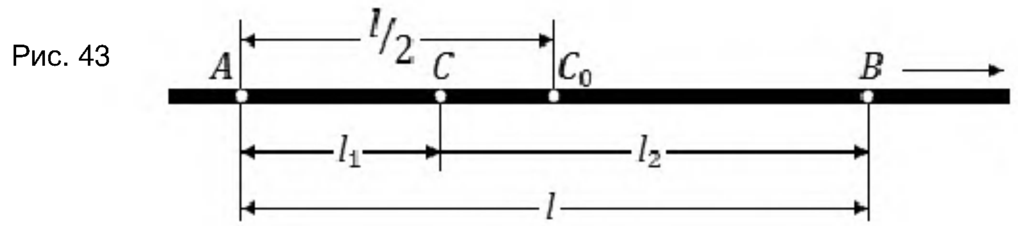
На это мы возразим, что если бы задача решалась так просто, то мы не включали бы её в книгу.

В самом деле, допустим, что двое живущих точно посредине между остановками вышли из дому и любопытства ради пошли на разные остановки. Если они идут с одинаковой скоростью, то, конечно, придут на свои остановки одновременно. Допустим, что тот, кто пришёл на остановку A, чуть-чуть опоздал: двери вагона трамвая только что захлопнулись. Ему ничего не остаётся, кроме ожидания следующего трамвая. А тот, кто пошёл на остановку B, разумеется, попадает в трамвай, на который опоздал его товарищ, потому что у него в запасе есть то время, которое трамвай должен затратить на преодоление пути AB. Таким образом, средняя между A и B точка не является нейтральной: с неё выгодно идти к B. Нейтральная точка где-то левее. Насколько левее – это зависит от скорости трамвая и скорости пешехода. Найдите эту зависимость. И ещё подумайте, почему в условиях задачи упоминается туман.

В

Обозначим длину пути AB через l, скорость трамвая – $v_т$ и пешехода – $v_п$. Нанесём на отрезке AB искомую точку C (рис. 43). Расстояние AC обозначим через l_1, BC – через l_2. Точка C нейтральна, т.е., очевидно, такова, что, на какую из остановок

Рис. 43



ни пойдёшь, застигнешь трамвай относительно остановки в одинаковом положении: или он стоит, или подходит, или отошёл. Трамвай на остановку A попадёт на t секунд раньше, чем на остановку B, причём, если не принимать во внимание время стоянки трамвая,

$$t = \frac{l}{v_т} = \frac{l_1 + l_2}{v_т}.$$

Следовательно, пешеход, отправившийся из C в A, должен попасть туда на время t раньше, чем идущий из C в B. У пешехода, идущего к B, есть в запасе время t. Иными словами, если обозначить время движения пешехода из C в A через t_1, а из C в B – через t_2, то должно выполняться равенство

$$t_2 = t_1 + t\,.$$

Поскольку

$$t_1 = \frac{l_1}{v_п}\,, \quad t_2 = \frac{l_2}{v_п}\,,$$

то после подстановки в формулу значений t, t_1 и t_2 имеем

$$\frac{l_2}{v_п} = \frac{l_1}{v_п} + \frac{l_1 + l_2}{v_т}, \quad \text{или} \quad \frac{l_2 - l_1}{v_п} = \frac{l_1 + l_2}{v_т}.$$

После очевидных преобразований

$$l_2 v_т - l_1 v_т = l_1 v_п + l_2 v_п, \quad l_2(v_т - v_п) = l_1(v_т + v_п)$$

получаем окончательную формулу:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{v_т + v_п}{v_т - v_п}.$$

Если, например, $v_т = 10$ м/с и $v_п = 2$ м/с, то

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{10 + 2}{10 - 2} = \frac{12}{8} = 1{,}5,$$

т.е. нейтральная точка C в 1,5 раза ближе к A, чем к B.

Чем меньше скорость пешехода, тем ближе это отношение к единице, т.е. тем ближе нейтральная точка C к средней C_0. Для черепахи точка C практически совпадает с C_0. Наоборот, с увеличением скорости пешехода точка C всё больше приближается к первой остановке A. Человек, опаздывающий на работу, способен бежать 500 метров, допустим, со скоростью 5 м/с. Для него $\frac{l_2}{l_1} = 3$, и если $l = 500$ м, то $l_1 = 125$ м, $l_2 = 375$ м. Если ваша скорость равна скорости трамвая, то вам почти с любой точки между остановками выгоднее бежать к B. Если же ваша скорость ещё больше, то вам трамвай не нужен.

Ещё проще решение, подсказанное автору рецензентом Г.М. Ховановым. Задача легко решается с помощью понятия относительного движения. Из всего множества жителей улицы имеется такой, который живёт именно в нейтральной точке C. Допустим, что он пошёл на остановку A и пришёл туда вместе с трамваем. Если бы он пошёл в B, то и туда он пришёл бы вместе с этим же трамваем (точку C мы назвали нейтральной потому, что она обладает именно этим свойством).

Сравним эти два случая. И в том и в другом начальное расстояние между трамваем и пешеходом равно некоторому $x_н$, конечное же $x_к = 0$. Таким образом, до встречи трамвай в обоих случаях должен преодолеть одно и то же относительное расстояние

$$x = x_н - x_к = x_н - 0 = x_н$$

(не относительно земли, а относительно пешехода, – тут от вас требуется некоторое усилие воображения). В первом случае относительная скорость сближения трамвая и пешехода равна $v_т + v_п$, во втором – $v_т - v_п$. Разделив относительное расстояние x на относительную скорость, мы получим время от старта пешехода до встречи с трамваем:

$$t_1 = \frac{x}{v_т + v_п}, \quad t_2 = \frac{x}{v_т - v_п}.$$

Поскольку скорость пешехода относительно земли в обоих случаях предполагается одинаковой, то пройденные пешеходом в первом и втором случаях расстояния по земле l_1 и l_2 относятся так, как затраченные на них времена t_1 и t_2:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{v_т + v_п}{v_т - v_п},$$

что и даёт окончательную формулу.

Что касается упоминавшегося в разделе **А** тумана, то он был напущен в задачу для её упрощения. В отсутствие тумана задача имеет два решения. Рассмотренное решение в отсутствие тумана верно только для экстренного случая, т.е. когда видишь, что трамвай уже подходит к A и тебе к A не успеть. Тогда надо быстро прикинуть, где при той скорости, на которую ты способен, находится нейтральная точка C, и если она левее тебя, то беги вправо. Если же правее – бежать бесполезно, уже опоздал. А если трамвай ещё далеко, то спешить некуда. И тогда, разумеется, нейтральной точкой является C_0, так как на первый план выступает простое соображение экономии подмёток.

43. По дороге идут машины

А

По узкой дороге (шириной 3 м) слева направо со скоростью 20 м/с мчатся машины. Они идут такой плотной колонной, что пешеходу рискованно пытаться проскочить между ними через дорогу. Поэтому пешеходов накопилось на обочине очень много – двести (или, скажем, миллион) человек. Но вот в колонне машин появился просвет длиной 100 м. Успеют ли все пешеходы перейти через дорогу в этом просвете? Если они ринутся толпой, то вполне возможно несчастье. Организуйте, пожалуйста, их переход так, чтобы все они, без давки и суматохи, не спеша, со скоростью 1 м/с, держа друг друга за руки, перешли через дорогу в этом просвете и чтобы движение машин при этом не было остановлено.

Б

Рассредоточьте пешеходов равномерно вдоль обочины дороги (например, с интервалом 1 м).

В

Успеет ли перейти дорогу один человек? Время, которое ему предоставляется для этого, равно длине просвета между машинами, делённой на скорость машин, т.е. 5 с. Время, нужное для перехода со скоростью 1 м/с дороги шириной 3 м, меньше 3 с. Таким образом, один человек, если он тронется в путь в момент, когда перед ним пройдёт последняя машина первой колонны, перейдёт дорогу без помех.

Вы рассредоточили пешеходов вдоль обочины дороги так, что они в своём движении помешать друг другу не могут. Следовательно, только что описанный порядок движения, который пригоден для одного человека, пригоден и для любого из остальных.

Каждый из этих пешеходов должен выполнить этот же манёвр: тронуться в путь в момент, когда перед ним пройдёт последняя машина. Поскольку перед каждым

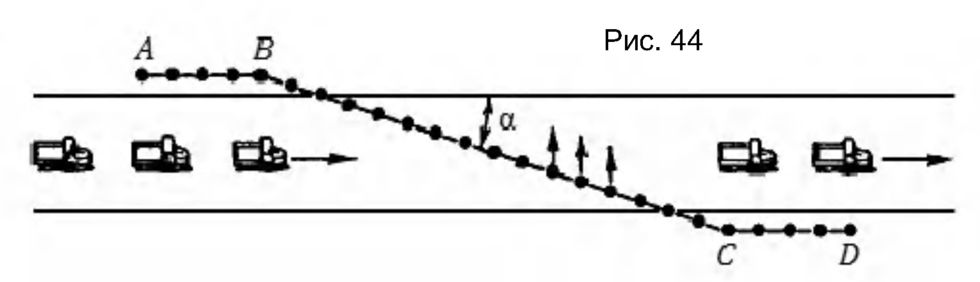


Рис. 44

следующим, начиная с левофлангового, последняя машина будет проходить всё позже, то и начинать движение каждый из них будет всё позже. В результате пересекать дорогу они будут косой цепочкой (рис. 44), хотя каждый из них будет идти перпендикулярно к дороге.

Пусть каждый пешеход, перейдя дорогу, останавливается. Тогда вся цепь пешеходов будет состоять из трёх участков: участка AB, параллельного дороге (состоящего из уже перешедших дорогу), косого участка BC (из переходящих дорогу) и параллельного дороге участка CD (из ожидающих своей очереди).

Из того, что каждый пешеход начинает движение в момент, когда перед ним пройдёт последняя машина, следует, что точка излома цепи C перемещается по цепи вправо со скоростью машины. То же можно сказать о любой точке косого участка BC: он перекатывается по цепи подобно волне слева направо со скоростью автомашины. Естественно, что надвигающаяся после просвета вторая автоколонна не может догнать этот косой участок и испортить нашу задачу. Поэтому пешеходам не составляет никакого риска взяться за руки. Они могут допустить даже ещё большее лихачество: замедлить свою скорость до 0,6 м/с, чтобы тратить на переход дороги все 5 с, имеющиеся в распоряжении у каждого. При этом косой участок цепочки станет ещё более пологим $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6\ \text{м/с}}{20\ \text{м/с}} = 0{,}03\,;\ \alpha = 1°43'\right)$, но скорость перемещения его вправо останется неизменной и равной скорости машины.

Если вы живёте в большом городе и из ваших окон виден оживлённый перекрёсток, то вы можете убедиться, что бывалые пешеходы интуитивно выстраиваются косыми цепочками, когда они, нарушая правила уличного движения, переходят улицу во время движения транспорта. При этом они, конечно, совершенно не думают о косых цепочках и, разумеется, не берут друг друга за руки: это только ограничило бы их свободу манёвра при уклонении от столкновения со встречными нарушителями порядка.

Отдавая должное безопасности уличного движения, мы обязаны заключить нашу задачу предупреждением: описанным способом переходить дорогу следует только на бумаге. На улице же придерживайтесь указаний светофора. Когда загорится зелёный свет, вы можете идти без всяких вычислительных забот: машины в это время будут стоять.

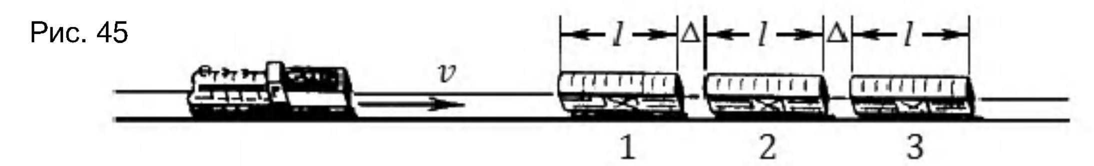
44. Толчок вдоль поезда

А

Каждый из вас наверняка наблюдал, как быстро передается вдоль состава от вагона к вагону толчок подаваемого паровоза. Удар! – и грохот проносится вдоль состава, через секунду раздаваясь уже в хвосте поезда, хотя паровоз толкнул первый вагон с очень малой скоростью, почти нежно.

В этом нет ничего удивительного. Пусть вагоны длиной l метров каждый стоят в составе так, что зазор между ними равен Δ метрам (рис. 45; буфера для простоты не показаны). Если паровоз подходит к составу со скоростью v, то второй вагон получит толчок от первого через время $t_1 = \frac{\Delta}{v}$ после столкновения паровоза с первым

Рис. 45



вагоном, $(n+1)$-й от n-го – через $t_n = \frac{n\Delta}{v}$, т.е. толчок за время t_n распространится на расстояние $l_n = n(l+\Delta)$. Следовательно, скорость распространения толчка вдоль состава будет равна

$$v_n = \frac{l_n}{t_n} = \frac{n(l+\Delta)}{\frac{n\Delta}{v}} = v\frac{l+\Delta}{\Delta}.$$

Пример: длина вагона $l = 10$ м, расстояние между буферами $\Delta = 0{,}05$ м, скорость паровоза $v = 0{,}5$ м/с. Скорость распространения толчка

$$v_n = v\frac{l+\Delta}{\Delta} \approx v\frac{l}{\Delta} = 0{,}5\cdot\frac{10}{0{,}05} = 100 \text{ м/с}$$

оказывается превосходящей скорость паровоза в 200 раз!

После этих довольно длинных приготовлений мы попросим вас повторить вычисления для случая, когда на рельсах стоит состав с такими фантастическими размерами: длина каждого вагона $l = 1$ км, зазор между вагонами $\Delta = 0{,}1$ мм. И пусть на этот состав на полном ходу налетает паровоз, скорость которого равна 40 м/с. Как быстро передаётся толчок по составу в этом случае?

Б

Многие из решающих задачу находят удивительными только условия задачи и ничуть не удивляются её результату. Между тем в условиях задачи нет ничего невозможного: вагон длиной в 1 км *можно* построить, зазоры между вагонами в 0,1 мм *можно* создать, паровоз *может* налететь на состав со скоростью 40 м/с. Удивительным является другое:

$$v_n = v\frac{l}{\Delta} = 40\cdot\frac{1000}{0{,}0001} = 400 \text{ млн. м/с} \text{ !!!}$$

Эта цифра выше скорости света (которая равна 300 млн. м/с). Но ведь Эйнштейн утверждает, что ничто не может двигаться со скоростью, большей скорости света. Так где же тут ошибка? Или ошибки нет? Может быть, ошибается Эйнштейн?

Сомневаться в выводах Эйнштейна ни у кого не хватает смелости, поэтому все стремятся найти ответ, согласованный с Эйнштейном. Нужно отдать должное: во многих ответах содержатся рассуждения, достойные того, чтобы о них поговорить. Так, например, ученик Н. после глубокого раздумья разрешил этот парадокс так. Поскольку закон сохранения энергии должен быть соблюдён и поскольку при столкновении часть кинетической энергии паровоза передаётся вагону, то скорость вагона и паровоза оказывается ниже, чем первоначальная скорость паровоза. После столкновения со вторым вагоном общая скорость двух вагонов и паровоза будет ещё ниже, и т.д. Если всё это учесть, то окажется, что толчок распространяется по поезду со скоростью, меньшей скорости света, и, следовательно, ничего сверхъестественного не происходит.

Допустим, что паровоз делится кинетической энергией с вагоном действительно так, как предположил ученик Н. Тогда в рамках предложенного примера действительно не будет сверхсветовой скорости. Но это только временная передышка, а

не ответ на задачу. Ведь можно представить, что паровоз мчится со скоростью, в десять раз большей. Можно также предположить, что масса паровоза в сотни раз больше массы вагона (паровоз длиной в 100 км!). Тогда из огромных запасов его кинетической энергии только ничтожная часть израсходуется на придание нужной скорости первым вагонам, и, следовательно, хотя бы по первому десятку вагонов толчок будет передаваться со сверхсветовой скоростью! Кроме того, толчок по составу может передаваться не совсем так, как полагает ученик Н.

Если один бильярдный шар сталкивается с другим точно по центру, то он сам останавливается и полностью (или почти полностью) передаёт свою кинетическую энергию второму шару, а не делится с ним поровну. Удар по цепочке шаров передаётся так, что последний шар отскакивает почти с той же скоростью, с какой налетел ударяющий шар на первый, а все остальные остаются неподвижными. Если предположить, что толчок по составу передаётся так же, как по цепочке шаров, то и в рамках предложенного примера скорость передачи толчка окажется сверхсветовой.

Оригинальный ответ дал ученик В. Он сказал, что поскольку и паровоз, и каждый из вагонов движутся со скоростью, не превосходящей 40 м/с, то нигде постулат Эйнштейна не нарушается. А то, что толчок движется по составу с такой огромной скоростью, удивляет его не более, чем то, что точка E пересечения двух прямых AB и CD (рис. 46) при вращении прямой CD вокруг точки C тоже движется вдоль прямой AB со сверхсветовой скоростью в то время, когда прямая CD становится параллельной (или почти параллельной) прямой AB. И вагоны, и прямая CD движутся с нормальными, вполне возможными скоростями, а толчок, так же как и точка E, является нематериальным понятием, и, следовательно, они и не обязаны подчиняться постулату Эйнштейна.

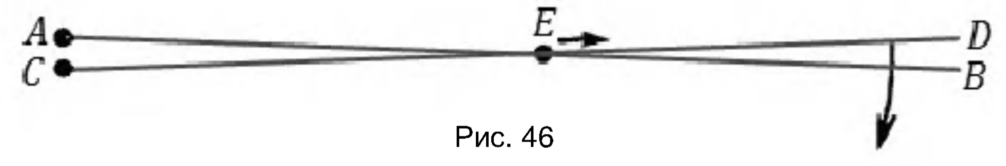


Рис. 46

Должен вас разочаровать: и этот ответ, несмотря на его некоторую эффектность, неправилен. Точка пересечения прямых E действительно может двигаться со сверхсветовой скоростью, потому что она является только математическим понятием, не содержащим в себе ни массы, ни энергии. Толчок же представляет собой физическое явление; вместе с толчком переносится энергия. Можно, например, в конце состава между буферами поместить орех (или инфузорию, если зазор маловат для ореха), и он толчком будет расколот. На это будет израсходована энергия. Откуда она взялась? Пришла от паровоза. Со сверхсветовой скоростью? Но энергия не может распространяться со сверхсветовой скоростью!

Надо отметить, что многие дают и правильный ответ. Однако мы приведём пока только его начало: при выводе формулы для скорости распространения толчка были допущены упрощения, вполне приемлемые при длине вагона 10 м и величине зазора 5 см, но совершенно недопустимые при длине вагона 1 км и зазоре 0,1 мм. Найдите эти упрощения, приведшие к ошибке.

В

При выводе формулы мы молчаливо предполагали, что в момент толчка весь вагон от начала до конца приходит в движение одновременно, т.е. что вагон являет-

ся абсолютно твёрдым телом. Только это даёт нам право считать, что через время Δ/v после удара паровоза о первый вагон произойдёт удар первого вагона о второй. Но предположение, что весь вагон одновременно приходит в движение, равносильно предположению, что толчок вдоль вагона распространяется мгновенно, т.е. с *бесконечно большой* скоростью. На самом деле толчок со стороны паровоза приводит в движение сначала только переднюю часть вагона, в то время как остальная часть остаётся неподвижной. В результате передняя часть вагона вынуждена сжаться. После сжатия эта часть, как пружина, распрямляется, заставляя двигаться следующую, более далёкую, часть вагона. Поскольку ещё более далёкие части всё ещё неподвижны, то эта «вторая» часть тоже вынуждена сжаться. Распрямляясь, она приводит в движение ещё более далёкий участок, и т.д. (Конечно, деление вагона на первую, вторую и т.д. части весьма условно. Мы прибегаем к нему для того, чтобы обойтись без высшей математики.) В результате толчок проходит вдоль вагона с некоторой конечной скоростью, определяемой свойствами материала, из которого сделан вагон. Эта скорость равна скорости звука в данном материале[1]. Скорость продольных звуковых волн в стали, например, равна $v_{зв} = 5000$ м/с.

С учётом времени распространения толчка вдоль вагона оказывается, что второй вагон получит толчок через время $t_1' = \dfrac{l}{v_{зв}} + \dfrac{\Delta}{v}$.

При выводе первоначальной формулы мы пренебрегли первым слагаемым и допустили при этом незначительную ошибку, потому что в первом примере

$$\frac{l}{v_{зв}} = \frac{10}{5000} = 0{,}002\ \text{с} \ll \frac{\Delta}{v} = \frac{0{,}05}{0{,}5} = 0{,}1\ \text{с}.$$

Во втором же примере

$$\frac{l}{v_{зв}} = \frac{1000}{5000} = 0{,}2\ \text{с} \gg \frac{\Delta}{v} = \frac{0{,}0001}{40} = 0{,}0000025\ \text{с}.$$

Здесь следовало бы пренебречь вторым слагаемым (т.е. именно тем, которое мы учитывали) и учесть первое (которым мы пренебрегли). И тогда скорость распространения толчка вдоль состава будет равна просто звуковой скорости в материале вагонов, а о сверхсветовой скорости не может быть и речи[2].

Теперь вы без труда разберётесь сами в нижеследующей задаче. Заменим прямые рис. 46 режущими кромками ножниц достаточной длины (километров 100 или более). Поведение точки пересечения E режущих кромок при резании внешне вполне подобно поведению точки E рис. 46, но если ножницы режут бумагу, то точка над-

---

[1] Вообще говоря, передача деформации – результат электромагнитных взаимодействий атомов. И, следовательно, скорость передачи взаимодействия не может быть больше световой, а инерция атомов делает её существенно меньшей (сравните с задачей «Да будет свет!»).

[2] Полезно разобрать другой аналогичный пример. Из пункта ***А*** в пункт ***Б*** проложен водопровод длиной 60 км. Труба заполнена водой, но в пункте ***А*** вентиль закрыт, и поэтому вода в трубе находится без движения. Откроем вентиль ***А***. Как быстро придёт в движение вода в пункте ***Б***? Казалось бы, мгновенно. На самом же деле понадобится время, равное времени распространения звуковой волны в воде (со скоростью $v_{зв} \approx 1{,}5$ км/с): $t_{зв} \approx 60/1{,}5 = 40$ с.

Однако данная конкретная капля воды из ***А*** (помеченная, например, чернилами) будет добираться до ***Б*** ещё дольше. При $v = 1$ м/с время $t_в = 60\,000\ \text{с} > 16$ час. Её скорость в данном случае аналогична скорости паровоза в нашей задаче.

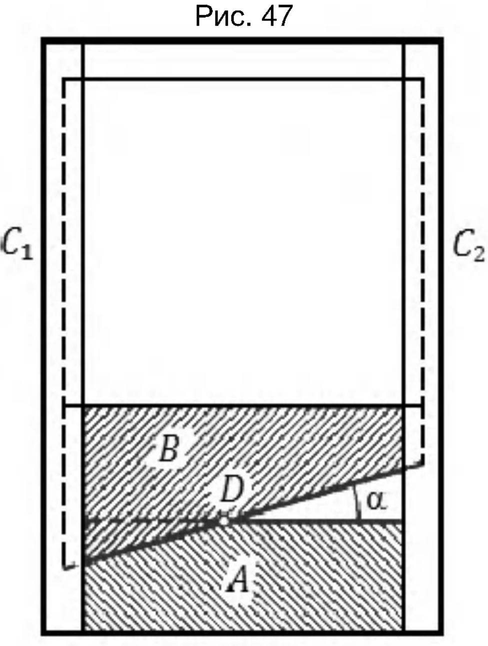
реза E будет уже не просто математическим понятием: в ней совершается работа по разрыванию волокон бумаги. Энергия на эту работу черпается из вашей руки. Сможет ли точка надреза перемещаться со сверхсветовой скоростью? А если не сможет, то что ей помешает?

45. Со сверхсветовой скоростью

А

Ножницы, упомянутые в конце предыдущей задачи, не могли резать бумагу со сверхсветовой скоростью. В момент, когда вы приводили в движение начальный участок ножниц, концы их оставались ещё неподвижными. В результате ножницы изгибались. Деформация изгиба передаётся по стали с конечной скоростью того же порядка, что и деформация сжатия в предыдущей задаче (скорость поперечных волн в стали – около 3000 м/с). Скорость точки надреза бумаги не может превзойти скорость, с которой передаётся вдоль режущей кромки ножниц усилие, заставляющее кромку прийти в движение.

Рис. 47



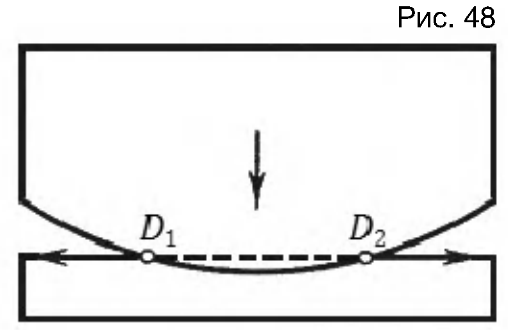
Но ножницы бывают разные. На рис. 47 показаны так называемые гильотинные ножницы (конструктивно напоминающие известную гильотину). Нож A с горизонтальной режущей кромкой укреплён неподвижно. Нож B с косой режущей кромкой поднимается вверх и затем освобождается. Падая по направляющим рейкам C_1 и C_2, нож развивает скорость. Обладая большой массой и скоростью, он с силой врезается в лист, подлежащий раскрою. Гильотинные ножницы широко применяются для раскроя листового металла. Точка надреза D движется вправо со скоростью тем большей, чем меньше угол α и чем больше высота, с которой падает нож B. Может ли скорость перемещения точки надреза в этих ножницах превзойти скорость света?

Б

Почти каждый, кто решал предыдущую задачу, недоумевает: зачем опять ставится этот же вопрос, когда уже всё ясно? Не может!

Найдите, откуда поступает энергия в точку резания, и вы придёте к выводу, что здесь скорость точки надреза *может* быть выше скорости света. Правда, для этого угол α должен быть настолько малым, что его очень трудно выдержать правильным. Если даже нож падает со скоростью 100 м/с и длина режущей кромки ножа составляет 3 км, то и тогда для достижения сверхсветовой скорости правый край падающего ножа должен быть выше левого не более чем на 1 мм. Однако если сделать падающий нож с дугообразной кромкой (рис. 48), то тогда угол α в процессе резания

Рис. 48



будет меняться от нуля в сторону увеличения, и, следовательно, точки надреза (теперь их две – D_1 и D_2) хотя бы в первое мгновение будут двигаться со сверхсветовой скоростью. Остаётся объяснить, почему это возможно для гильотинных ножниц и невозможно для обычных.

В

Отличие гильотинных ножниц от обычных состоит в том, что здесь режущая кромка верхнего ножа приходит в движение одновременно вся целиком. Если в обычных ножницах энергия подаётся с одного конца, то здесь, подняв нож вверх, мы запасли потенциальную энергию по всей длине ножниц. При падении ножа происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую по всему ножу одновременно. Поэтому в каждой точке резание происходит в первую очередь за счёт местной энергии, запасённой в элементе ножа, находящемся над данной точкой. Следовательно, здесь нет потребности в транспортировке энергии в направлении вдоль режущей кромки и нет ограничений, вытекающих из конечной скорости распространения энергии.

С движением точки надреза вдоль режущей кромки здесь не связано никакого переноса массы и энергии, поэтому здесь точка надреза является действительно только математическим понятием (так же как и отрезок BC в задаче «По дороге идут машины», который тоже может двигаться вправо со скоростью больше световой, если угол α достаточно мал[1]).

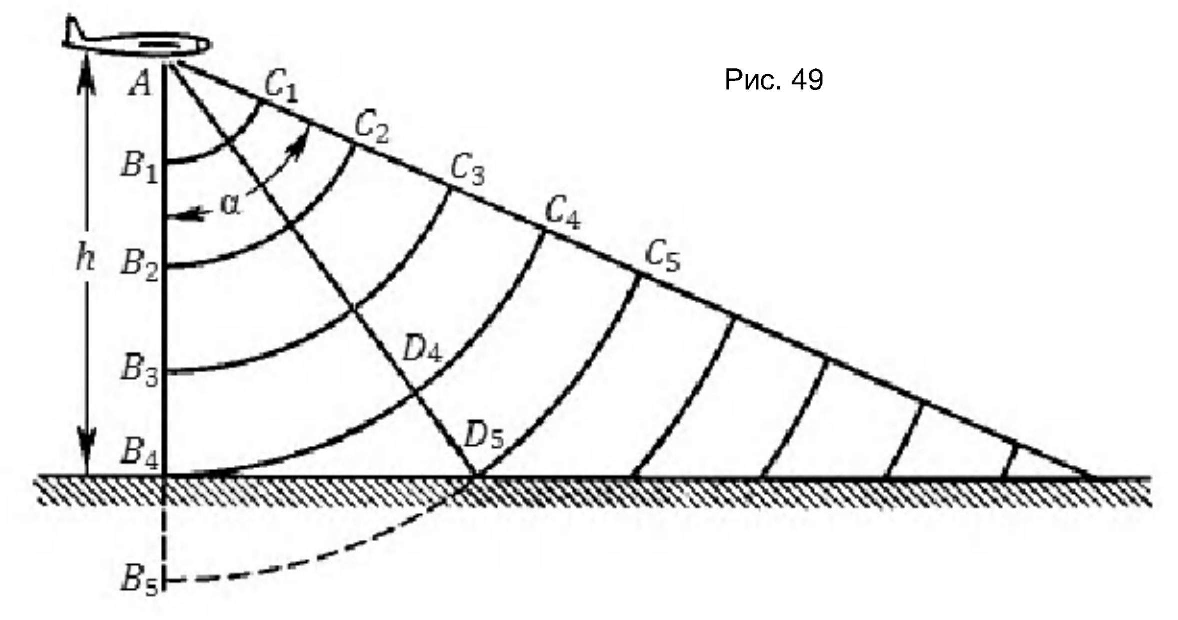


Рис. 49

Приведём пример ещё более скоростной «гильотины» из другой области – из радиолокации. Пусть на самолёте A (рис. 49) на высоте $h = 4$ км находится радиолокатор. В некоторый момент радиолокатор излучает импульс энергии в широком секторе α. Радиоволны распространяются с максимально возможной скоростью – 300 000 км/с. Через одну трёхсоттысячную секунды радиоволна пройдёт 1 км и окажется на дуге B_1C_1, через две – на B_2C_2, через четыре – на B_4C_4 и коснётся земной поверхности в точке B_4.

[1] Любопытно, что принцип «гильотины» (рис. 47) помогает объяснить кажущееся сверхсветовое расширение радиоисточников в новых космических объектах – квазарах (см. статью В.Н.Курильчика в журнале «Природа», 1974, № 8).

Рассматривая эту волну как «падающий нож гильотины» (с дугообразной кромкой и растущим во времени радиусом), мы легко заметим, что точка пересечения «режущих кромок» дугообразного и прямолинейного (поверхность Земли) «ножей» перемещается вдоль поверхности Земли со скоростью, которая намного выше скорости света[1].

В самом деле, за то время, за которое радиоволна пройдёт из положения B_4C_4 в положение B_5C_5 (сдвинется вперёд на отрезок D_4D_5), точка контакта волны с Землёй пройдёт отрезок $B_4D_5 \gg D_4D_5$, т.е. эта точка движется гораздо быстрее радиоволны (или, что то же самое, световой волны). Однако и здесь, разумеется, эта точка является только математическим понятием: вдоль прямой B_4D_5 нет переноса энергии со скоростью этой точки. В каждую точку (D_5) земной поверхности энергия радиолокатора попадает по прямой (AD_5) со скоростью света[2].

Другой пример движения точки со скоростью больше световой – движение светового пятна на экране электронно-лучевой трубки специального (высокоскоростного) осциллографа. Светлая точка в том месте на экране, куда падает электронный луч, может перемещаться по экрану со скоростью, большей скорости света, хотя вызывающие свечение электроны летят к экрану со скоростью намного меньше световой.

Разумеется, световому зайчику можно придать сколь угодно большýю скорость: представьте, что вы вращаете зеркало в руках, а зайчик от него пробегает по такому далёкому экрану, как Луна (или туманность Андромеды!!).

Отметим, что после знакомства с гильотинными ножницами нетрудно переделать и обычные ножницы так, чтобы скорость точки надреза могла стать сверхсветовой. Укрепив одну кромку ножниц неподвижно, придадим другой непрерывное вращательное движение (спилив, разумеется, выступы, мешающие этому вращению). Волна движения распространится вдоль вращающейся кромки за конечное время, но после этого уже вращающийся нож, подобно ножу гильотины, «зарядится» кинетической энергией по всей своей длине, причём запасы этой энергии с увеличением скорости вращения будут нарастать.

---

[1] Многим читателям кажется, что этим утверждением автор опроверг Эйнштейна. И это им нравится: опровергнуть Эйнштейна – не фунт изюму! Читатель Л. даже предлагает воплотить идею рис. 49 в такую конструкцию: в точке B_4 – ракета, а вдоль B_4D_5 – лампочки с автономными источниками питания, и всё это запускается падающей радиоволной. В этой установке, по замыслу читателя, информация о запуске ракеты бежит по лампочкам из B_4 в D_5 со скоростью выше световой. Однако всё это великолепие разбивается о тот факт, что информация об успешном запуске прибежит в D_5 всегда, даже если ракету забыли заправить горючим. На самом деле информация на последнюю лампочку поступает от радиоволны, а не от ракеты. Из волны мы узнали бы о запуске ракеты только при условии, что ракета включает передатчик, а не передатчик ракету (иная цепь причинно-следственных связей). Но тогда информация о ракете пришла бы по ломаной B_4AD_5, т.е. намного позже, чем по прямой B_4D_5.

[2] Заметим, что в трёхмерном случае вместо точки D_5 мы имеем окружность радиуса B_4D_5, расширяющуюся со сверхсветовой скоростью во все стороны от центра B_4.

46. Невероятное явление

А

Из труб идёт дым. Подхваченный ветром, он тянется длинным шлейфом от каждой трубы. Могут ли два дымовых шлейфа пересекаться?

Б

– Ну, это уж совсем невероятно! Если два дымовых шлейфа пересекаются, то это значит, что в точке пересечения ветер дует сразу в двух направлениях! Но ведь это абсурд!

Да, действительно, два ветра пересекаться в одной точке не могут. А два дыма могут! Вот подсказка, правда, в форме вопроса: обязательно ли направление дымового шлейфа совпадает с направлением ветра?

В

Два дымовых шлейфа могут пересекаться, если хотя бы один из источников дыма движется. На рис. 50 показаны два дымящих паровоза: стоящий A с дымом AA' и идущий вправо B с дымом BB'. Дым стоящего паровоза уходит по направлению ветра. Дым двигающегося делает то же самое. Однако, в отличие от первого, дым второго паровоза исходит из движущейся трубы. Отдельные клубы дыма BB', обозначенные точками $1'$, $2'$, $3'$, были выпущены трубой B из различных положений – 1, 2, 3. Ветер, направление которого показано стрелками $11'$, $22'$, $33'$, к данному моменту отнёс эти клубы на линию BB'. В дальнейшем он будет сносить линию BB' параллельно самой себе. Нетрудно сообразить, что направление прямой BB' можно получить как одну из диагоналей EC параллелограмма $BCDE$, построенного на векторах скорости ветра $v_в$ и скорости паровоза $v_п$. Обратите внимание: эта диагональ совпадает не с вектором суммы BD, а с вектором разности EC.

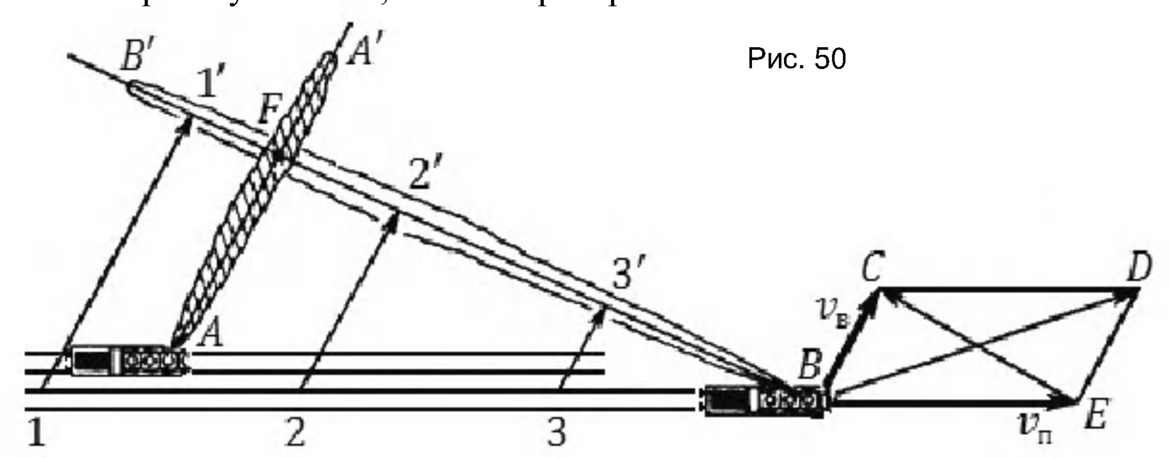


Рис. 50

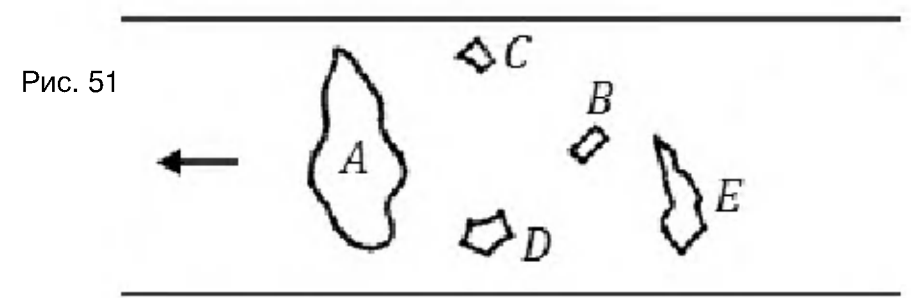
Интересно, что точка пересечения дымовых шлейфов F с течением времени перемещается в направлении AA' со скоростью ветра. При этом частицы дыма в точке F, принадлежащие разным дымовым шлейфам, взаимно неподвижны, если не считать случайных завихрений.

47. Ледоход[1]

А

По спокойной, глубокой и прямой реке идёт лёд (рис. 51). Толщина льдин одинакова и мала. Ветра нет. Догонят ли льдинки *B*, *C* и *D* большую льдину *A* или отстанут от неё?

Рис. 51

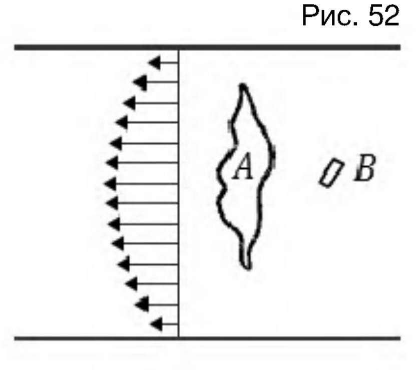


Б

Судя по характеристике реки, на ней нет водоворотов. Каждая капля воды движется параллельно берегам. Из-за трения о берег скорость течения у самого берега близка к нулю и постепенно возрастает к середине. Льдинки *C* и *D*, идущие у берега, движутся медленнее льдин *A* и *B*, идущих посредине. Следовательно, они отстанут. Ну, а догонит ли идущая посредине льдинка *B* льдину *A*, тоже идущую посредине, решите сами. Заодно отметьте некоторые особенности поведения льдины *E*.

В

Рис. 52



На рис. 52 показано приблизительное распределение скорости поперёк реки. Максимальная скорость $v_{\max}$ – на середине. Хотя и *A*, и *B* идут посредине реки, но условия их движения разные. Льдина *A* огромна, она захватывает и самую быструю часть реки, и более медленные прибрежные струи. По этой причине скорость льдины *A* будет некоторой средней, ниже $v_{\max}$. Льдинка *B* – маленькая, она практически вся находится в самом быстром течении, поэтому её скорость будет максимальной, и она догонит льдину *A*.

Турист, совершающий путешествие на льдине *A*, мог бы увидеть любопытное явление: края льдины обгоняют реку (вода уходит под льдину спереди и выходит из-под неё сзади), а середина льдины, наоборот, отстаёт от реки. Находящийся на льдине *B* второй турист (меньшей весовой категории, разумеется) не заметил бы подобного явления (хотя оно в принципе есть и там, только намного слабее выражено).

Льдина *E* плывёт с вращением против часовой стрелки: её прибрежный край движется медленнее, чем второй, удалённый от берега. Вращение неравномерно. В показанном на рис. 51 положении (поперёк реки) льдина вращается быстро, потому что разность скоростей воды на её краях велика. Когда же она повернётся на 90° и будет ориентирована бóльшим размером вдоль реки, то вращение замедлится: разность скоростей будет невелика; кроме того, и плечи вращающих сил, приклады-

[1] Задача опубликована в 3-м издании («Наука», 1976) – *Прим. составителя документа.*

ваемых от воды к льдине, будут малы. С дальнейшим разворотом скорость вращения будет вновь то возрастать, то уменьшаться.

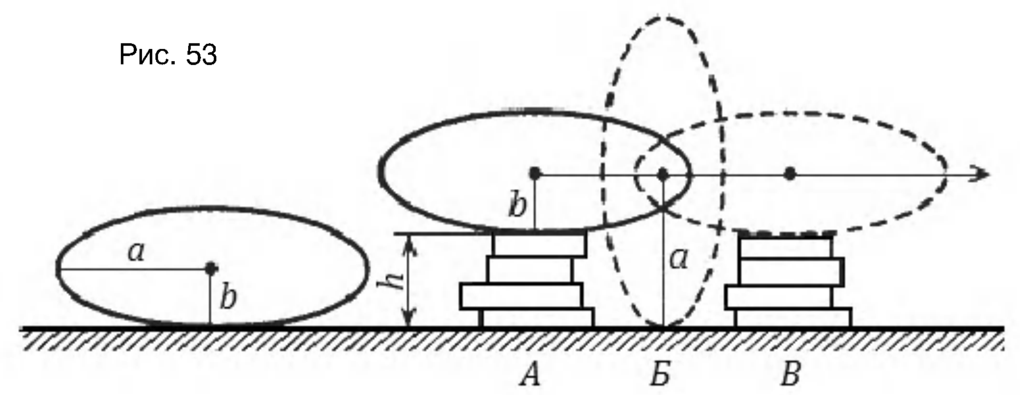
Строгая связь между углом ориентации льдины и скоростью вращения довольно сложна: нужно учитывать инерцию льдины, сглаживающую неравномерности вращения, учитывать, что из-за неравномерности распределения скорости воды вдоль льдины сила трения льда о воду тоже неравномерна. Равномерно вращаться должна бы круглая льдина при условии, что её поступательное движение параллельно берегу. Если же она приближается к берегу, то её вращение должно ускоряться. Переходя от одного берега к другому, льдина сменит направление вращения на обратное. Льдинки C и D тоже вращаются, причём в разные стороны.

48. Лежачий камень [1]

А

Корчуя садовый участок, мы обнаружили большущий камень. Как и следовало ожидать, он лежал как раз там, где не следовало. Естественно, его нужно было убрать, и мы приступили. Камень был далеко не круглым, поэтому кантовать его было трудно, хотя путь, по которому мы его катили, был достаточно ровным. Мы дружно кричали «раз – два, взяли!» – и камень, поднявшись на попа́, затем шлёпался вперёд.

Рис. 53



– Стой, ребята, не так! – закричал Гена Иванов, наш сосед. Он быстро набросал впереди камня горку обрезков досок (рис. 53*а*) и вместе с нами налёг на камень. Тот легко перевалил через доски. Приказав нам держать его вертикально (рис. 53*б*), Гена перенёс горку обрезков опять вперёд камня (рис. 53*в*) и последний опять сам, почти без нашей помощи, форсировал это препятствие[2]. Это было как в сказке: по ровной дороге камень катиться не желал, а по ухабам – с удовольствием!

Почему неровная дорога лучше ровной? Каковы принципы конструирования наилучшей дороги для камней разного сечения? Всякому ли камню можно приготовить идеальную дорогу?

Б

Начнём с шарообразного камня. Очевидно, для него наилучшая дорога – гладкая и горизонтальная. А если она к тому же ещё и твёрдая, то шар массой в тонну

[1] Задача опубликована в 4-м издании («Наука», 1979) – *Прим. составителя документа.*

[2] Автор признателен Г.Ф. Иванову за помощь в транспортировке камня и за демонстрацию эффектного приёма, подсказавшего эту задачу.

можно катить по ней одним пальчиком. То же верно и для цилиндрического камня с круглым сечением. Почему, если сечение камня не круглое, то трудности существенно возрастают?

В

Барон фон Гринвальдус,
Сей доблестный рыцарь.
Всё в той же позицьи
На камне сидит.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Немецкая баллада»

Шарообразный камень по гладкой горизонтальной твёрдой дороге катится почти без усилий: в силу шаровой симметрии его центр масс движется равномерно и прямолинейно, параллельно дороге и, следовательно, горизонтально и поэтому в принципе никаких затрат энергии не требует. На практике энергия нужна для преодоления трения и – вначале – для придания камню поступательного и вращательного движения, а в конце – для остановки (если не поручить это трению).

Камень любого другого сечения, очевидно, требует дополнительной работы по поднятию его центра масс при переходе из «лежачего» в «стоячее» состояние. Затем эта работа бездарно растрачивается при падении «стоячего» камня, после чего его вновь требуется поднимать и т.д. Очевидно, вся сила рационализаторского предложения Гены в том, чтобы, раз поставив камень «на попá», в дальнейшем не растрачивать всей его потенциальной энергии на падение, а делать подставку такой высоты, при которой изменение высоты центра масс при переходе камня из вертикального положения в горизонтальное было бы минимальным. Очевидно, что для эллиптического камня высота подставки должна равняться $h = a - b$, где a и b – большая и малая полуóси эллиптического сечения камня (рис. 53). Тогда в обоих положениях центр масс камня будет на одной высоте, т.е. такое качение эллиптического камня по «ухабам» почти эквивалентно качению шарового камня по горизонтальной плоскости.

А почему «почти»? А потому, что, кроме вертикального и горизонтального, у камня есть и промежуточные, наклонные положения. Нельзя ли сконструировать такие «ухабы», чтобы камень эллиптического, квадратного или треугольного сечения катился по ним так же легко, как шар по плоскости?

Сознáемся сразу: нам не удалось найти строгое решение задачи. По правилам игры такую задачу не следовало бы включать в книгу, так как она бросает тень на умение автора всегда смотреть в корень. Но шут с ней, с тенью! Уж больно интересная задача. К тому же, как вы видели, практически ценная. И не только для перекатывания камней. Она наверняка пригодилась бы в теории механизмов. Да мало ли где! Часто задача, решённая в одной области, вдруг находит применение в другой, казалось бы, очень отдалённой. Так, энтропия термодинамики вдруг заработала в теории информации. Пути науки неисповедимы. В науке поставить задачу иногда важнее, чем её решить.

Начнём с камня-призмы с сечением в виде правильного треугольника со сторонами a (рис. 54). Центр масс треугольника – на пересечении его медиан (и, для данного треугольника, биссектрис и высот), на расстоянии $h/3$ от любого из оснований.

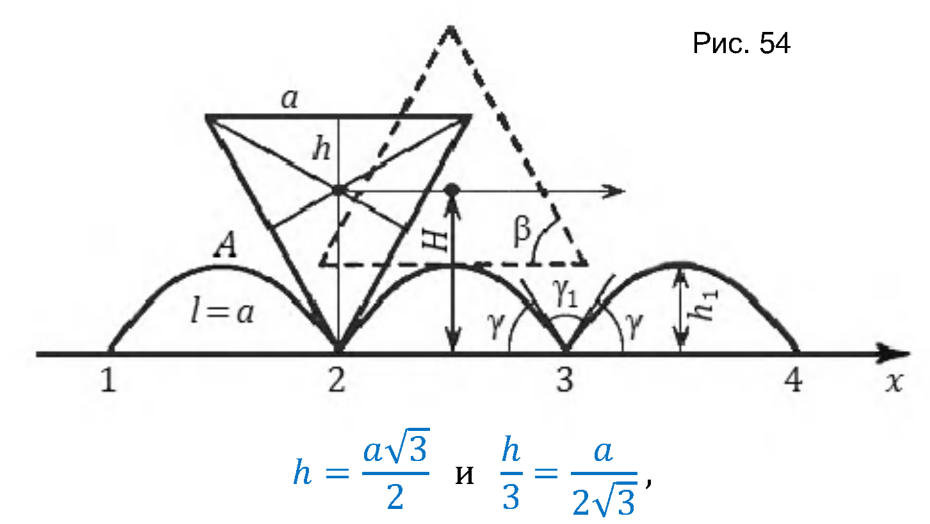


Рис. 54

Поскольку

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ и } \frac{h}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

то для постоянства высоты H центра масс $\left(H = \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$ при качении высота дороги должна меняться в пределах от 0 до $h_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Длина кривой «ухаба» 1-A-2 должна равняться $l = a$; если равенство не соблюдено, то треугольник, катясь стороной a по l, станет на свою вершину не в углублении, а ближе него или дальше, отчего он поднимется, и будет нарушено главное требование $H = \text{const}$. Правда, можно допустить $l \neq a$, если допустить скольжение по ухабу. Но каждый, кому приходилось заставлять тяжёлый камень «скользить» по земле, асфальту или другому камню, скажет, что лучше уж нарушить требование $H = \text{const}$, чем мучиться со скольжением.

Что ещё можно сказать о кривой 1-A-2 с первого взгляда? Нужно потребовать, чтобы в точках 1, 2, 3 она подходила к оси абсцисс под углом $\gamma = 60°$. Если $\gamma > 60°$, то вершина камня ($\beta = 60°$) просто не войдёт в углубление, камень зависнет. Если же $\gamma < 60°$, то $\gamma_1 > 60° = \beta$, и камень не сможет стоять в углублении на своей вершине: он будет валиться набок, что равносильно вращению камня вокруг точки 2 (или 3) и нарушению $H = \text{const}$.

И этот же угол γ_1 должен быть $\geqslant 90°$, иначе камень, вылезая из впадины, обломает либо свою вершину, либо предыдущий ухаб, который он уже, казалось бы, преодолел. Противоречивость требований к углу ($\gamma_1 = 60°$ и $\gamma_1 \geqslant 90°$) означает, что для камня типа треугольной призмы оптимального (в смысле $H = \text{const}$) профиля дороги не существует.

Конечно, можно каждый раз, остановив камень «на голове», перенести ухаб сзади наперёд и т.д. Но эта беготня не украсит решение задачи.

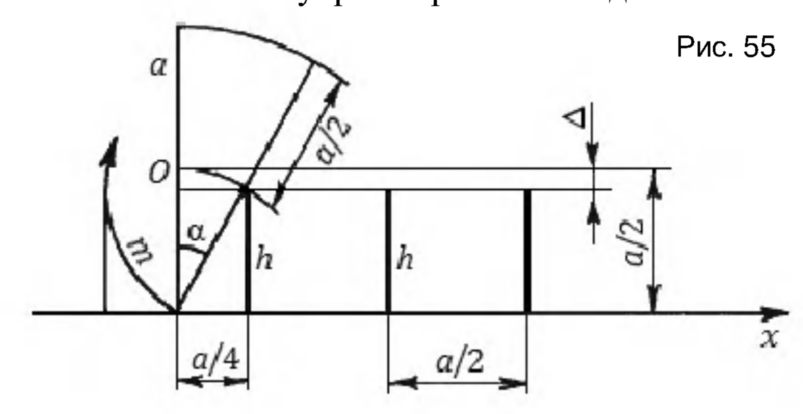


Рис. 55

Отсюда же следует, что невозможно строго решить задачу и для камня в виде бесконечно тонкой пластины, потому что её сечение можно рассматривать как пре-

дельный случай треугольника, у которого один из углов стремится к нулю. Для пластины лучшее из того, что удалось построить, показано на рис. 55. Стоящую вертикально пластину длиной a нужно наклонять вправо, пока её центр масс O не сместится вправо на $x = a/4$. Подставив под её центр масс подставку высотой h, будем вращать пластину вокруг вершины подставки как центра. Левый конец её, описав дугу m, укажет пространство, в котором запрещено пребывание предыдущего ухаба. Итак, шаг между подставками должен быть $a/2$. Центр масс пластины не движется горизонтально, он то опускается на $\Delta = a/2 - h$, то поднимается. Величина

$$h = \frac{a}{2} \cdot \cos\alpha, \quad \alpha = 30°,$$

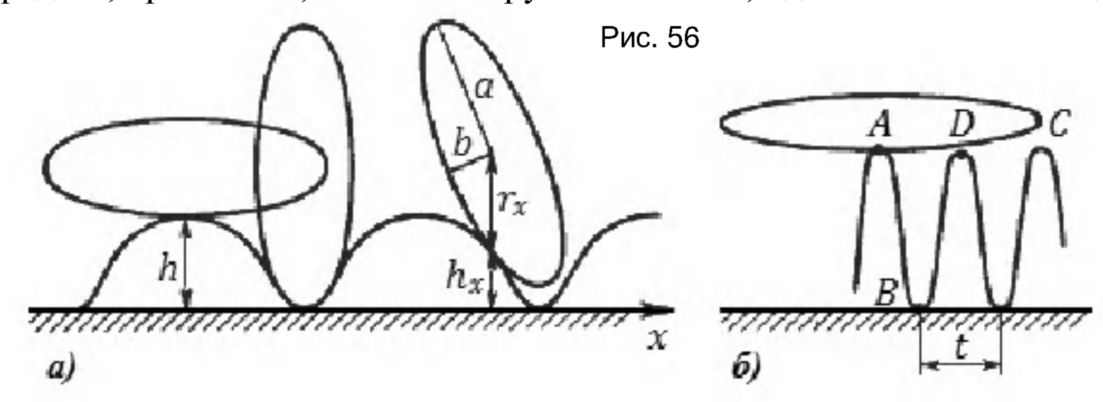
тогда

$$\Delta = \frac{a}{2} \cdot (1 - \cos\alpha) = \frac{a}{4} \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}07a,$$

т.е. примерно одна седьмая от того перемещения $a/2$, которое было бы при «перекатывании» пластины по гладкой дороге[1].

Квадратное сечение не даёт в углублении тех хлопот, которые были с треугольным. Но только квадратное: прямоугольник в общем случае не удастся выкатить из углубления. Правильные пяти-, шестиугольники (и т.д.) тоже выкатываются из углубления без разрушений. И чем многоугольнее n-угольник, тем ближе строгое решение: в пределе, при $n \to \infty$, мы имеем круглое сечение, идеал всех камней и дорог.

Рис. 56



Казалось бы, эллиптическое сечение не доставит хлопот (рис. 56*а*): строй высоту профиля дороги h_x такой, чтобы в паре с соответствующим «радиусом» эллипса r_x она составляла нужную высоту $H = h_x + r_x = \text{const}$ – и вся недолга́. Тем более что одной из крайностей для эллипса является окружность ($b = a$), для которой всё ясно. Но вспомним другую крайность. Представим эллипс с $b \to 0$. И мы вернёмся к бесконечно тонкой пластине (рис. 55). Как же ведёт себя эллипс в остальных случаях? Плохо, и в этом можно легко убедиться при малом b (рис. 56*б*). Требование качения без скольжения сводится к равенству длин соприкасающихся линий. В нашем случае нужно, чтобы $AB = l/4$, где l – периметр эллипса. При малых b имеем

$$AB \approx \frac{l}{4a}.$$

Как видно из рисунка, при этом ухабы получаются весьма изрезанными и шаг их меньше a, отчего эллипс в положении лёжа простирается сразу над несколькими ухабами и не может закатиться в углубление. Чем меньше b, тем гуще ухабы, и в пределе при $b \to 0$ шаг ухабов $t \to 0$.

[1] А если учесть, что по гладкой дороге камень при перевороте продвигается вперёд на a, а по нашей – только на $a/2$, то результат оказывается вдвое хуже.

По мере увеличения b эта трудность должна уменьшаться; на рис. 56a она уже перестала быть очевидной. Но при непрерывном увеличении b она не может исчезнуть скачком: точка D, в которой ухаб препятствует вращению камня, по мере увеличения b будет перемещаться по эллипсу к вершине C, а по ухабу – к впадине B. Препятствие, по-видимому, исчезнет только при $b = a$, когда эллипс превратится в окружность. Строгое доказательство этого требует применения дифференциальной геометрии, которая вне рамок данной книги. Вполне возможно, что кем-то где-то эта задача уже решена, но найти в литературе это решение не удалось.

Если кто-то из читателей захочет вывести автора из положения барона фон Гринвальдуса, то для него формулируем основные свойства нужного рельефа дороги. В каждой точке дороги равновесие камня должно быть безразличным, как равновесие шара на горизонтальной плоскости. Это требование геометрии и статики. Ухабы не должны заклинивать камень, лишая его возможности передвигаться. Это требование геометрии и кинематики. Требование динамики: катящийся камень должен иметь равномерные поступательное и вращательное движения, или, поскольку это требование, по-видимому, невыполнимо, то по крайней мере кинетическая энергия суммы этих движений должна быть постоянной. Так это у шара на горизонтальной плоскости, и этого же мы хотим от нашего камня на ухабах. Для начала можно пренебречь требованиями динамики. Если строгого решения нет, неплохо найти наилучшее из возможных. Вашему воображению поможет картонная модель сечений камня и дороги, положенная на стол.

Неужели нельзя превзойти решение Гены?

IV. Письма и волны

49. Да будет свет!

А

Наступают сумерки. Где-то в начале улицы замыкают рубильник, и все нити накальных ламп вспыхивают. Но почему они вспыхивают не одновременно? Сначала ближний фонарь, а затем следующий и т.д., причём каждый позже предыдущего, так что создаётся впечатление бегущей вдоль по улице волны поджига[1]. Почему?

Б

– Запаздывание из-за конечной скорости света? Но его скорость такова, что улицу длиной в 1 км он пробегает за 3,3 мкс. А инерция зрения в 20 000 раз больше, так что заметить это невооружённым глазом невозможно.

– Но надо ещё учесть и время движения волны тока по проводам. Запаздывание равно сумме запаздываний движения тока туда и света обратно.

Верно, но скорости тока и света практически равны (если не делать специальных индуктивно-ёмкостных замедлителей). Время запаздывания всего лишь удвоилось бы.

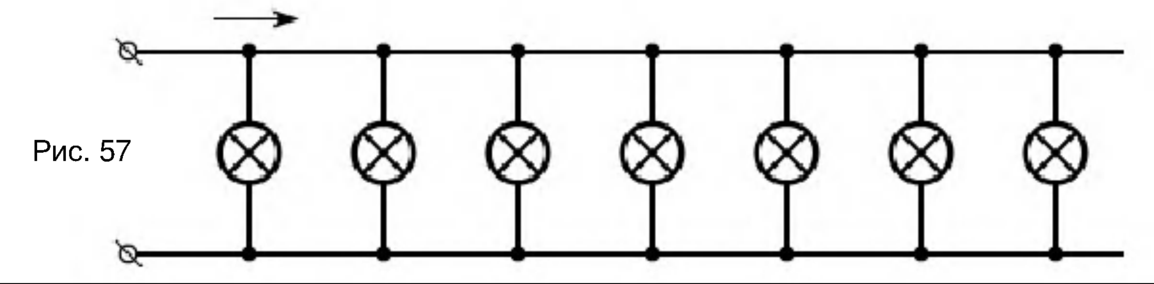
Кроме того, если вы посмотрите в другой конец улицы (на другой вечер, конечно), то обнаружите, что волна зажигания бежит на вас, а не от вас. А это полностью разрушает приведённое выше объяснение. Оба конца улицы одновременно вы можете увидеть, находясь в стороне от неё. Волна будет бежать со стороны рубильника. Если он слева, то волна будет бежать по фонарям вправо, сначала приближаясь к вам, а затем удаляясь.

Одна из главных причин запаздывания – инерция накальной нити лампы: пока она не разогреется – света не будет. Но почему, несмотря на однотипность всех ламп и одинаковость их инерции, загораются они не одновременно?

В

На рис. 57 показана идеализированная двухпроводная линия и множество накальных ламп. Подав напряжение, мы обнаруживаем, что все лампы вспыхивают одновременно (пренебрегаем упомянутыми микросекундами).

Однако если перейти от идеальной линии к реальной, сразу обнаруживаются существенные различия: каждый погонный метр провода обладает сопротивлением


Рис. 57

[1] Автор признателен инженеру А.В.Громову за идею этой задачи и за проделанные в нашей лаборатории эксперименты.

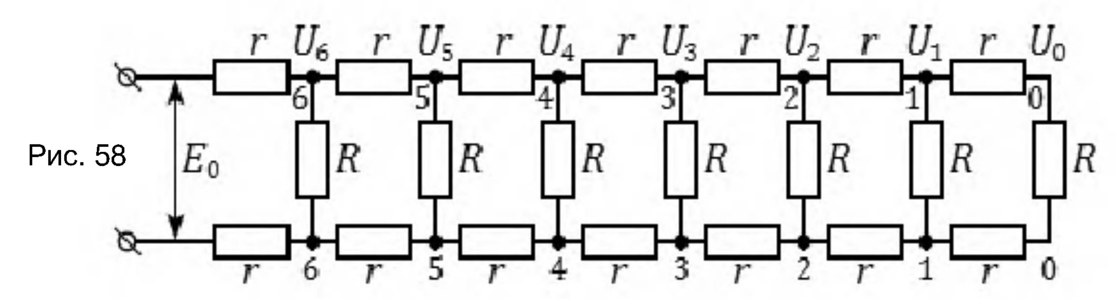


Рис. 58

ρ, индуктивностью L и ёмкостью C (ёмкость образуется главным образом за счёт двухпроводности: два провода – это две обкладки «конденсатора»). На частоте сети (очень низкой – 50 Гц) влиянием индуктивности и ёмкости на выводы нашей задачи можно пренебречь. Но сопротивление проводов, которое тоже, казалось бы, пренебрежимо мало, является, к всеобщему удивлению, решающим.

На рис. 58 показана схема, эквивалентная реальной линии с семью фонарями. Здесь R – сопротивление накальной нити лампы, r – сопротивление провода от фонаря до фонаря. Из схемы следует, что поскольку сопротивления проводов r включены последовательно с сопротивлением лампы R, то, если подать на вход напряжение $E_0 = 220$ В, к лампе 6 будет приложено $U_6 < E_0$, так как часть напряжения упадёт на обоих r. Легко убедиться, что на рис. 58

$$E_0 > U_6 > U_5 > \ldots > U_0\ ,$$

т.е. самая далёкая лампа будет и самой тусклой.

Однако не думайте, что в этом всё дело! Объяснением бегущей волны поджига тут ещё и не пахнет!

Главная причина бегущей волны в том, что сопротивление накальной нити в холодном состоянии $R_{\text{х}}$ намного меньше, чем в горячем ($R_{\text{х}} < R_{\text{г}}$). В момент включения все лампы холодны. Рассмотрим одну-единственную лампу 6 (рис. 58). Напряжение E_0 прикладывается к делителю напряжения $r + R_{\text{х}} + r$, и поскольку $R_{\text{х}}$ мало́, то ток велик и на сопротивлениях проводов падает значительная часть напряжения. В результате на само́й лампе $U_{6\text{х}} \ll E_0$. Но ведь это напряжение является исходным для делителя, в состав которого входит вторая лампа 5. Эта лампа тоже холодна и её $R_{\text{х}}$ мало́, а значит, $U_{5\text{х}} < U_{6\text{х}}$. Более того, второй делитель 6-5-5-6 шунтирует первую лампу 6, отчего сопротивление между точками 6-6 и напряжение $U_{6\text{х}}$ ещё меньше. И вот такое низкое напряжение $U_{6\text{х}}$ прилагается к делителю 6-5-5-6, ещё более низкое напряжение $U_{5\text{х}}$ – к делителю 5-4-4-5 и т.д. В результате последняя лампа 0 разогревается малым током I_0 от малого напряжения U_0, а первая 6 – бóльшим током I_6 от большого напряжения U_6. Ясно, что первая от рубильника лампа разогреется быстрее. И вот тогда произойдёт самое интересное. Сопротивление горячей лампы раз в десять больше сопротивления холодной. Поэтому первая лампа практически перестаёт шунтировать последующие: ток в ней уменьшается, уменьшится и падение напряжения на подводящих проводах, отчего возрастёт падение напряжения на лампе 6. (Ток уменьшился, а падение напряжения возросло – это не нарушение закона Ома, потому что сопротивление лампы переменно: оно возросло больше, чем напряжение на ней.)

Итак, в горячем состоянии лампы 6 напряжение $U_{6\text{г}} \gg U_{6\text{х}}$, а поскольку $U_{6\text{г}}$ подаётся на делитель 6-5-5-6, то создаются условия для разогрева лампы 5, всё ещё шунтирующей последующие лампы. В соответствии с этим каждая последующая лампа загорается после того, как загорелась предыдущая.

Итак, гвоздём задачи являются два неравенства:

$$E_0 \gg U_{6х} \gg U_{5х} \gg U_{4х} \gg U_{3х} \gg U_{2х} \gg U_{1х} \gg U_{0х}\,, \quad (1)$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$E_0 > U_{6г} > U_{5г} > U_{4г} > U_{3г} > U_{2г} > U_{1г} > U_{0г}\,, \quad (2)$$

а точнее, неравенство этих неравенств (отражено несколько непривычно, с помощью знаков $\uparrow$ между членами верхнего и нижнего неравенств). Неравенство **(1)** для холодного состояния значительно сильнее неравенства **(2)**, соответствующего горячему состоянию. Промежуточное состояние между этими двумя крайними особенно интересно:

$$E_0 > U_{6г} > U_{5г} \gg U_{4х} \gg U_{3х} \gg U_{2х} \gg U_{1х} \gg U_{0х}\,. \quad (3)$$

Здесь отражено состояние, когда лампы 6 и 5 уже горят, их сопротивления уже велики, и поэтому U_6 и U_5 уже незначительно отличаются от E_0 (знак $>$), а остальные ещё не горят, их сопротивления ещё малы, и поэтому $U_{4х}$, $U_{3х}$ и т.д. отличаются от своих предшественников значительно (знак $\gg$). По мере перехода из состояния **(1)** в состояние **(2)** знаки $\gg$ заменяются на знаки $>$, но не все одновременно, а по очереди, слева направо. Это и обеспечивает движение волны поджига по улице слева направо.

От изложенного выше чисто качественного решения задачи следует перейти к количественному, иначе среди читателей найдутся скептики, сомневающиеся в том, что сопротивление r, обычно довольно малое, может привести к заметному эффекту.

Алюминиевый провод сечением 1,5 мм^2 длиной 50 м имеет сопротивление $r = 1$ Ом. Сопротивление накальной нити лампы на 220 В и 100 Вт зависит от температуры, которая, в свою очередь, зависит от напряжения. Для установившегося режима (спустя, например, минуту после включения напряжения), т.е. после того как лампа прогрелась до максимума, соответствующего данному напряжению U, эксперимент даёт цифры тока I, сопротивления R и относительной светоотдачи L, указанные в табл. 1.

Таблица 1

U, В	0	5	10	20	40	100	120	150	200	220
I, А	0	0,075	0,10	0,13	0,18	0,30	0,33	0,37	0,43	0,46
R, Ом	30	67	100	154	222	333	364	405	460	480
L	0	0	0	0	0,00	0,01	0,04	0,15	0,6	1

Итак $R_х = 30$ Ом, $R_г = 480$ Ом, т.е. сопротивление нити после включения под напряжение 220 В возрастает в 16 раз.

Таблица 2

i лампы	6	5	4	3	2	1	0
$R_{iх}$	7,2	7,5	8	9	11	15,5	30
$R_{iг}$	73	84	100	123	162	241	480
$U_{iх}$	175	137	109	89,5	76	67	63
$U_{iг}$	214	210	206	202,5	200	198,5	197

В табл. 2 показаны результаты расчёта сопротивления схемы между точками i-i и падения напряжения на них в момент включения ($U_{iх}$) и после разогрева всех ламп

($U_{iг}$). Считать R_i удобнее от конца к началу схемы, U_i – от начала к концу. Строка U_{ix} иллюстрирует сильное начальное неравенство напряжений на лампах [неравенство (**1**)], строка $U_{iг}$ – слабое конечное неравенство (**2**).

Этот расчёт показывает, что в момент включения на ближайшей лампе возникает напряжение 175 В, вполне достаточное для её разогрева до свечения (спустя время, определяемое тепловой инерцией нити), а на последней лампе в этот же момент возникает всего лишь 63 В, которые не заставят светиться лампу, рассчитанную на 220 В. Она загорится гораздо позже, когда все предыдущие лампы перестанут её шунтировать. После этого на ней установится 197 В, что достаточно для её свечения, правда, несколько более слабого, чем при 220 В.

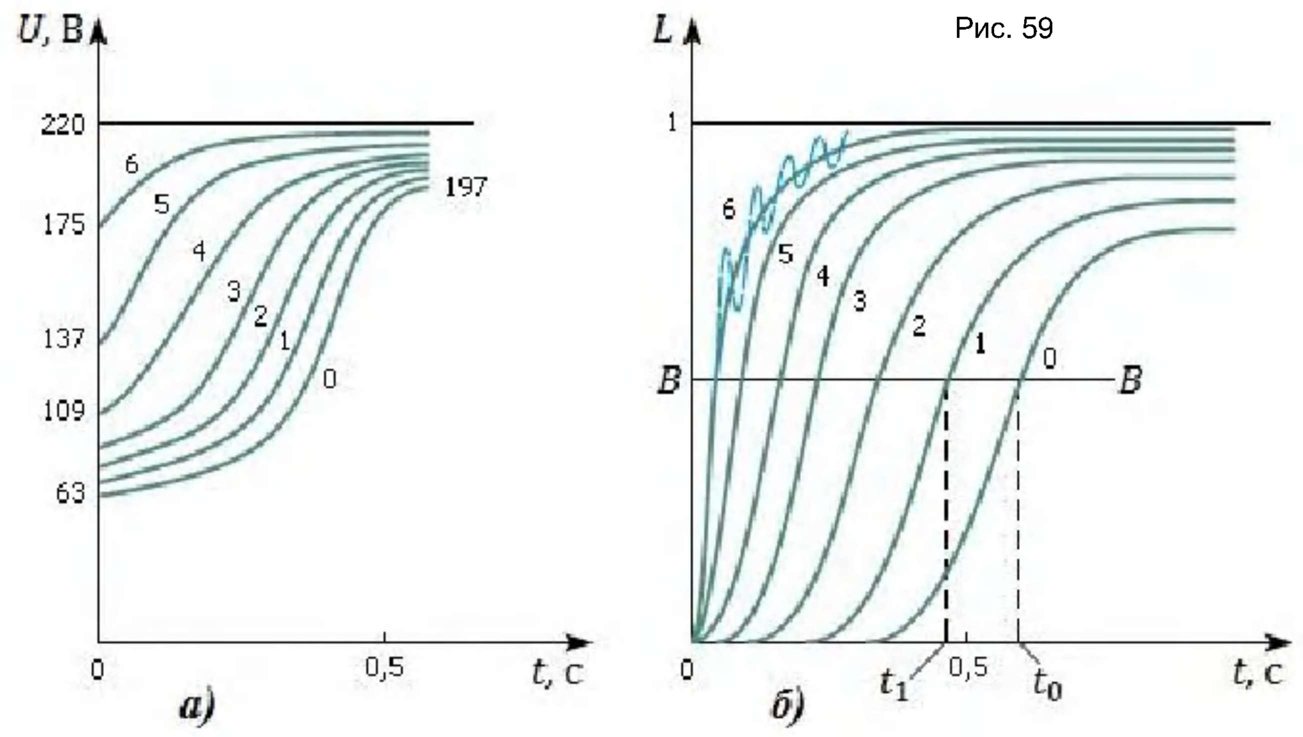
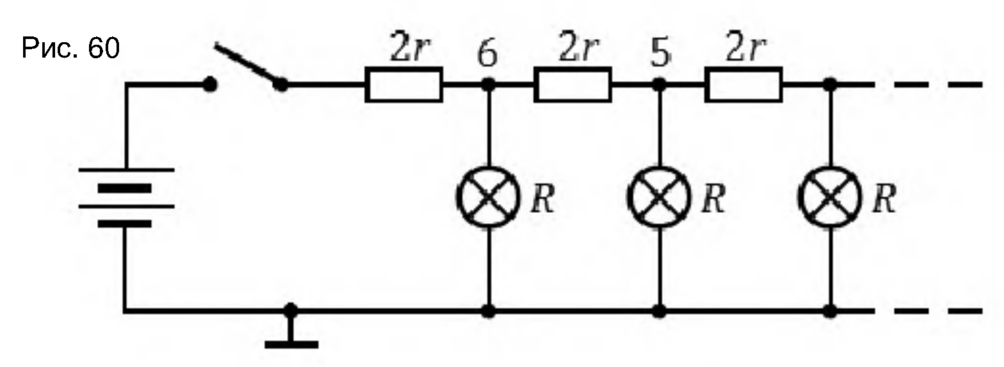


Рис. 59

Как же идёт у каждой лампы переход из начального состояния в конечное? Рассчитать сам переход в рамках данной книги невозможно. Дело в том, что законы роста напряжения на каждой лампе различны, и поэтому различны законы роста температуры каждой нити и, следовательно, её сопротивления. А каждое из этих растущих сопротивлений, в свою очередь, влияет на рост напряжения на каждой из ламп, как последующих, так и предыдущих. Кроме того, рост температуры не повторяет рост напряжения ни по форме, ни по времени из-за тепловой инерции нити. И, наконец, светоотдача нити определяется через спектральную характеристику глаза и совпадающую с нею часть спектра излучения нити, которая с ростом температуры долго пренебрежимо мала (см. строку L в табл. 1), а затем начинает расти гораздо круче напряжения. Короче говоря, для строгого решения задачи о свечении каждой из семи ламп в зависимости от времени необходимо решение системы из семи дифференциальных уравнений, которую читатель может решить на досуге, когда поступит в аспирантуру. Мы же вполне удовлетворим своё любопытство, сняв интересующие нас кривые экспериментально (рис. 59), с помощью специальной настольной модели (рис. 60), в которой вместо сопротивлений длинных проводов поставлены компактные резисторы $2r$.

Если вы вместо аккумулятора будете питать модель от сети, то все кривые станут знакопеременными, однако амплитуды этих синусоид будут меняться в соответ-

Рис. 60



ствии с рис. 59*а*. Изменится и рис. 59*б*, но не столь решительно: появятся пульсации света с глубиной не более 10-15% (пунктир на кривой 6), так как тепловая инерция нити не позволяет падать яркости лампы до нуля в моменты перехода напряжения через нуль (см. следующую задачу).

Подытожим: для того чтобы увидеть бегущую по фонарям волну поджига, необходимо наличие трёх условий: заметного сопротивления проводов, тепловой инерции накальных нитей ламп и зависимости сопротивления нити от её температуры. Отсутствие любого из этих условий ведёт к одновременности зажигания всех ламп. В случае накальных ламп все три условия присутствуют всегда. Правда, в разных случаях – в разной степени. В хорошо сконструированной линии сопротивление провода от фонаря до фонаря меньше 1 Ом. Например, если провод состоит из 7 алюминиевых жил, подобных рассмотренной выше, то и сопротивление уменьшится в 7 раз, волна поджига будет бежать приблизительно в 7 раз быстрее. Если лампы меньшей мощности, то их сопротивление выше и, кроме того, тепловая инерция нити меньше.

Вы ходите в кино? Тогда вы, возможно, замечали. Герой входит в тёмную комнату и включает ночничок. В жизни маломощная лампочка ночничка вспыхивает практически мгновенно. В кино же освещённость комнаты от ночничка разгорается явно замедленно. Это потому, что где-то вне поля зрения в этот момент включается более инерционный «Юпитер». Его свет и должен играть роль света ночничка, такова специфика кино.

Простенькая и эффектная модель бегущей волны поджига может получиться из лампочек для карманного фонарика. Подбирая сопротивления $2r$, имитирующие сопротивления проводов, можно добиться, что десятая от источника лампа будет зажигаться на 1-2 с позже первой. Можно ли пустить это в дело?

Во-первых, это любопытная ёлочная игрушка. Во-вторых, это реле времени. Если настроить каскад фототранзистора так, чтобы он срабатывал при уровне яркости BB (рис. 59*б*), то к его выходу можно подключить прибор, которому нужно почему-либо срабатывать с задержкой (например, фотоаппарат при некоторых специальных съёмках). Передвинув фототранзистор к лампе 0, мы получим задержку t_0 (относительно момента включения напряжения), к лампе 1 – задержку t_1, и т.д. Мы не претендуем на изобретение нового реле времени: хотя у него и есть новизна, но второй признак изобретения – полезность – здесь может быть оспорен, так как есть более простые и точные способы решения той же задачи. Но где-то этот эффект может оказаться полезным: ничто не должно ускользать из поля зрения изобретателя.

50. Огни в зеркале

А

Вы наблюдаете в зеркале огни городской улицы, освещённой самыми разными светильниками. Если покачивать зеркало, то изображения огней растягиваются в светящиеся замысловатые кривые. Легко добиться, чтобы эти кривые были близки по форме к окружностям. Почему кривые от одних ламп оказываются сплошными, а от других – пунктирными? Сколько штрихов будет на окружности, если зеркало совершает в секунду пять полных качаний?

Б

Осветительная сеть питается переменным током частоты 50 Гц. Однако будьте бдительны: эта цифра может вас подвести.

В

При вращении зеркала изображение лампы перемещается по замкнутой кривой. Яркость каждой точки кривой соответствует яркости лампы в тот момент времени, когда её изображение находится в данной точке. Если яркость лампы постоянна во времени, то и все точки кривой имеют одинаковую яркость (предполагается, что вращение зеркала равномерно). В противном случае кривая выглядит пунктирной.

Лампы уличного освещения питаются переменным током. Поэтому яркость всех уличных светильников должна пульсировать. Однако глубина пульсации яркости у разных источников различна. Меньше всего она у накальных ламп. Накальная нить не успевает остыть в те моменты, когда ток через неё равен нулю, поэтому пульсация её яркости не превосходит 10-15%. Такая разница в яркости обнаруживается с трудом. Поэтому и кривая в зеркале кажется имеющей практически равномерную яркость.

Люминесцентные («дневного света» и др.) и газосветные (например, неоновые) лампы менее инерционны: в моменты, когда ток обращается в нуль, они гаснут почти полностью.

Вычислим частоту пульсации лампы. Согласно закону Джоуля – Ленца количество тепла, выделяемое током в накальной нити, пропорционально квадрату силы тока; равно нулю, когда ток равен нулю, и положительно как при отрицательной, так и при положительной полуволнах тока, т.е. нить нагревается (и остывает) дважды за период тока.

Итак, яркость накальной лампы пульсирует с частотой вдвое большей, чем частота тока. Это же имеет место и у люминесцентной лампы. Поэтому, если зеркало совершает 5 качаний в секунду, а частота тока в сети равна 50 Гц, то на кривой будет обнаружено $(50 \cdot 2)/5 = 20$ штрихов.

Пульсация силы света, излучаемого люминесцентной лампой, оказывается вредным явлением. Если цех освещён солнечным светом, то все быстро вращающиеся детали станков сливаются в сплошные круги. Люминесцентной же лампой цех освещается периодически (100 раз в секунду), вращающаяся деталь будет видна в тех положениях, в которых её застигнет импульс света, отчего она перестаёт сливаться в круг, в глазах рабочего начинает «рябить», что быстро его утомляет.

Ещё хуже, если деталь совершает ровно 100 оборотов в секунду: тогда каждый импульс света будет застигать её в одном и том же положении, и она будет казаться неподвижной (сравните с задачей «Винт самолёта в кино»). Колесо, имеющее 10 спиц, будет казаться неподвижным при 10 об/с, 20 спиц – при 5 об/с и т.д. Это явление называется стробоскопическим эффектом (от греческих слов «стробос» – вертушка и «скопео» – вижу). Ясно, что если рабочий примет вращающуюся деталь за неподвижную, то это может привести к несчастному случаю.

Можно ли, однако, устранить этот вредный эффект? Можно. Надо, чтобы одна лампа зажигалась тогда, когда гаснет другая, для чего следует питать две лампы со сдвигом фазы на 90°. Поскольку на всех заводах есть трёхфазная сеть, то практически удобно собирать лампы по три в одном светильнике и питать их от разных фаз сети (со сдвигом на $\pm 120°$).

Стробоскопический эффект может принести также и пользу. Если плавно менять частоту пульсаций источника света, то вращающаяся деталь станет казаться неподвижной, когда число оборотов детали и число пульсаций в секунду станут равными. Если мы знаем частоту пульсаций, то этим самым мы измерим и число оборотов детали. Приборы, измеряющие скорость вращения по этому методу, называются строботахометрами (от греческого «тахос» – скорость).

Интересный случай стробоскопического эффекта приводится в книге голландского учёного М. Миннарта[1]. Велосипедист, проезжающий со скоростью 5 м/с по улице, вымощенной брусчаткой с размером бруска 5 см и освещённой люминесцентными лампами, видит брусчатку неподвижной относительно самого себя. Это происходит потому, что за одно мерцание лампы велосипедист смещается вперёд ровно на один брусок, поэтому при каждой вспышке света он видит рисунок мостовой неизменным (хотя каждый брусок в рисунке при этом замещается его соседом). При увеличении скорости велосипедист начинает медленно «обгонять» брусчатку. Наоборот, при небольшом уменьшении скорости, ниже 5 м/с, брусчатка сама начинает «обгонять» велосипедиста, как бы убегая из-под колёс велосипеда вперёд.

51. Вниз головой

А

А теперь посмотрите через то же качающееся зеркало на экран телевизора. Вы увидите что-то подобное рис. 61. Конечно, то, что изображений не одно, а несколько, вполне объяснимо: изображение на экране появляется и пропадает 50 раз в секунду. Но вот что странно: несколько изображений видны кверху ногами, в то время как другие видны нормально. Объясните причины переворачивания изображений.

Б

Большинство из вас знакомо с принципами современного телевидения и без труда разберётся в описанном явлении. Для тех, кто не успел познакомиться с ними, нужны некоторые пояснения. Изображение на экране телевизора возникает не всё целиком одновременно. Его рисует электронный луч, обегая весь экран поочерёдно, точ-

[1] См. *Миннарт М.* Свет и цвет в природе. – М.: Физматгиз, 1958.

ка за точкой, так, как взор читателя обегает страницу книги при чтении. Луч сначала рисует слева направо верхнюю строку изображения, затем, несколько спустившись, возвращается налево и рисует вторую строку, третью и так до самой нижней, последней. После этого луч возвращается в левый верхний угол экрана и начинает рисовать второй кадр. В секунду луч рисует пятьдесят кадров (здесь для простоты мы опустили некоторые тонкости, вроде так называемой чересстрочной развёртки).

K H F E D C B A

Рис. 61

Советуем решить вспомогательную задачу. Как выглядело бы изображение в зеркале, если бы вышла из строя кадровая развёртка и луч на экране телевизора имел только движение по горизонтали и не имел бы движения по вертикали, т.е. если бы луч все стро́ки кадра накладывал одну на другую?

В

На рис. 62*а* показан телевизионный «кадр» в случае, когда все стро́ки кадра наложились друг на друга. Пусть зеркало вращается так, что изображение экрана в нём описывает окружность против часовой стрелки. Будем рассматривать изображение

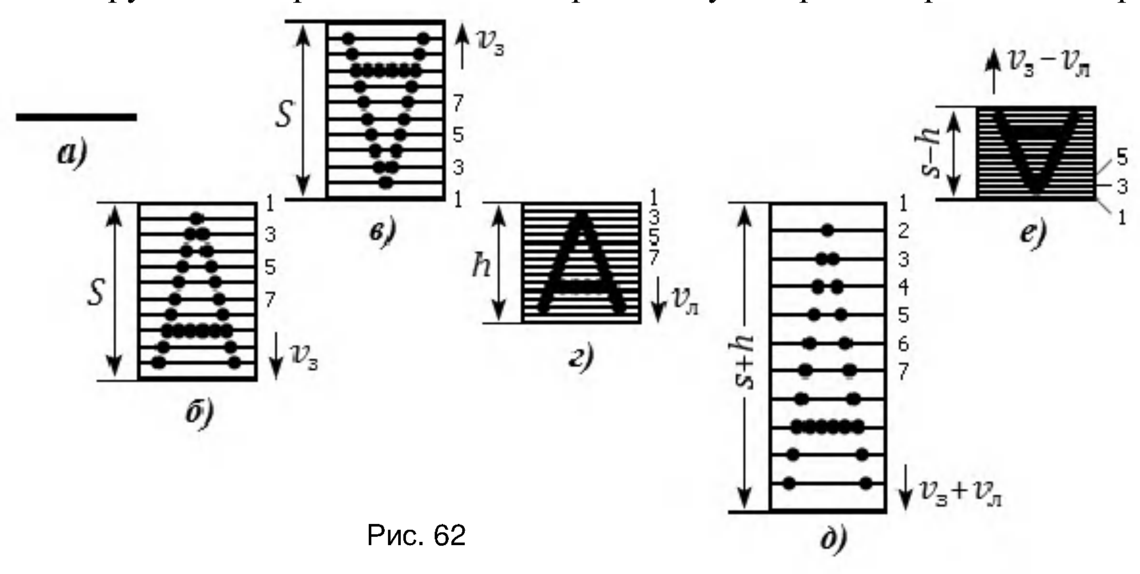


Рис. 62

«кадра» **А** на левой половине окружности в зеркале, где изображение зеркалом смещается вниз. Там кадр будет развёрнут вниз (рис. 62*б*): стро́ки 1, 2, 3, ... будут показаны глазу одна под другой, причём самая ранняя строка 1 будет выше всех, а самая поздняя – ниже всех. Высота кадра, на экране равная нулю, в зеркале будет видна как

$$S = v_з t\ ,$$

где t – продолжительность зарисовки кадра на экране, $v_з$ – скорость вращения изображения из-за вращения зеркала.

Как видите, в случае выхода из строя вертикальной развёртки вашего телевизора у вас есть возможность развернуть изображение вручную, с помощью зеркала (правда, инерционность свечения экрана приведёт к некоторому размазыванию изображения). Отметим, что на заре телевидения развёртка с помощью вращающихся зеркал применялась в телевизорах, пока её не вытеснили электронные методы развёртки.

Будем следить теперь за изображением «кадра» **А** на правой половине окружности, где изображение зеркалом смещается вверх. Там самая ранняя строка «кадра» окажется ниже всех, кадр будет развёрнут снизу вверх (рис. 62*в*). Высота кадра s будет той же, если скорость вращения зеркала не изменилась.

Рассмотрим теперь изображение при нормальной работе телевизора, когда на экране видна не одна-единственная строка, а полный кадр (рис. 62*г*) высотой h, в котором изображение развёрнуто по высоте за счёт движения электронного луча сверху вниз со скоростью $v_л$. На левой стороне окружности в зеркале кадр будет растянут по высоте до величины $s + h = t(v_з + v_л)$, так как там скорость луча и скорость зеркала суммируются (рис. 62*д*). На правой же стороне окружности скорость электронного луча и скорость зеркала направлены встречно. Поэтому кадр там будет вести себя по-разному. Там, где вертикальная скорость луча превосходит вертикальную скорость зеркала (A и B на рис. 61), изображение будет развёрнуто сверху вниз, т.е. нормально, «вверх головой» (в точках A и B зеркало растягивает изображение главным образом по горизонтали). Там, где вертикальные скорости луча и зеркала окажутся равными по величине, кадр, развёрнутый на экране лучом, будет «свёрнут» обратно движением зеркала (C и K на рис. 61). А там, где вертикальная скорость зеркала превосходит вертикальную скорость луча (D, E, F, H), изображение будет перевёрнуто «вверх ногами»: самая ранняя строка кадра (рис. 62*е*) окажется самой нижней, самая поздняя – верхней. Высота кадра в зеркале будет равна $s - h = t(v_з - v_л)$.

52. Винт самолёта в кино

А

Вы с приятелем смотрите кино. В кадре – самолёт, выруливший на взлётную полосу. Двухлопастный винт самолёта пришёл в движение. Сейчас самолёт начнёт разбег для взлёта.

– Винт в данный момент делает 11,5 оборота в секунду, – солидно, со знанием дела заявляет ваш приятель.

Откуда он может это знать, да ещё с такой точностью? Может быть, он это сказал безответственно, только потому, что его никак нельзя проверить?

Б

– Позвольте, вы ошибаетесь!..
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Опрометчивый турка»

Ваш приятель мог вычислить число оборотов винта. Можете сделать это и вы, если предварительно разберётесь в том, как будет выглядеть винт, совершающий число оборотов в секунду N, равное числу кинокадров в секунду n. Для простоты начните с однолопастного винта (хотя в авиации таких винтов и не бывает – центробежная сила инерции не была бы уравновешена и изогнула бы вал). Для справки: киносъёмка производится обычно со стандартным числом кинокадров в секунду $n = 24$.

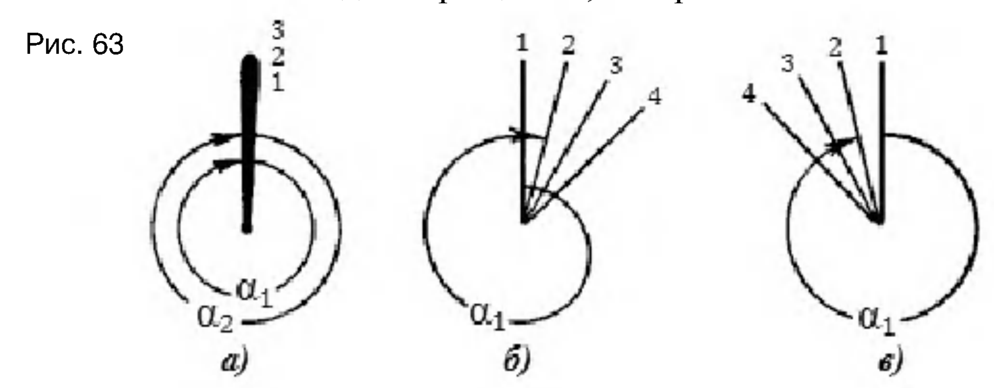
Проанализировав этот случай, рассмотрите поведение изображения однолопастного винта, совершающего $N = n + 1 = 25$ об/с и $N = n - 1 = 23$ об/с. Потом вы войдёте во вкус и уже сами во всём разберётесь.

В

– Я ошибаюсь?! Ни за что!..
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Черепослов» (оперетта)

Представим для простоты, что киносъёмка винта ведётся с предельно короткой выдержкой, и поэтому снимок винта на каждом кадре получается чётким, несмотря на быстрое вращение. Пусть на первом кадре лопасть винта оказалась вертикальной. Поскольку $N = n$, то к моменту съёмки второго кадра лопасть, совершив целый оборот (дуга $\alpha_1 = 360°$ на рис. 63*а*), опять окажется в вертикальном положении. Все промежуточные положения не будут сняты, так как лопасть прошла через них при закрытом затворе кинокамеры. То же повторится в третьем (дуга α_2) и последующих кадрах. В результате лопасть на всех кадрах будет представлена кинозрителю в одном и том же положении, и зритель, естественно, будет считать её неподвижной. Если, однако, он так же сообразителен как ваш приятель, то примет во внимание, что перед этим лопасть пришла в движение и непрерывно набирала обороты. Следовательно, сейчас она на самом деле вращается, совершая $N = n = 24$ об/с.

Рис. 63



Рассмотрим поведение изображения при $N = 25$ об/с (лопасть по-прежнему вращается по часовой стрелке). Если в первом кадре она заснята в вертикальном положении 1 (рис. 63*б*), то ко второму кадру $\left(\text{за } \frac{1}{24} \text{ с}\right)$ она совершит $\frac{25}{24} = 1\frac{1}{24}$ оборота (дуга $\alpha_1 = 375°$) и во втором кадре она будет снята с отклонением вправо от вертикали на $15°$ (прямая 2 на рис. 63*б*). В третьем кадре она будет зафиксирована ещё правее.

Легко сообразить, что, поворачиваясь от кадра к кадру на $15°$, изображение лопасти за 24 кадра (т.е. за 1 секунду) совершит один оборот и тоже по часовой стрелке. Таким образом, в то время как сама лопасть совершает 25 оборотов в секунду, её изображение на киноплёнке совершает $25 - 24 = 1$ об/с. Следить за таким медленным вращением, оценить кажущуюся его скорость и определить по ней истинную совсем нетрудно. Интересно, что если лопасть совершает 23 оборота в секунду, то зритель увидит её вращающейся также со скоростью 1 об/с, но против часовой стрелки, т.е. в направлении, противоположном истинному направлению вращения (рис. 63*в*).

В самом деле, в интервале между кадрами она поворачивается на $^{23}/_{24}$ оборота по часовой стрелке. Но зритель этого не видит. Он видит, что во втором кадре лопасть оказалась на $^{1}/_{24}$ оборота левее, чем в первом, в третьем – ещё на $^{1}/_{24}$ оборота левее, чем во втором, и т.д. Связывая эти последовательные образы по кратчайшему

расстоянию, зрительный аппарат создаёт впечатление медленного вращения против часовой стрелки.

Проследим теперь за поведением изображения лопасти в течение всего времени, пока она набирает скорость от 0 до 24 об/с. Неподвижная лопасть изображается неподвижной. Пока число её оборотов невелико (1÷5), зритель успевает следить за изображением. С дальнейшим увеличением оборотов зритель уже не успевает следить за лопастью, хотя её изображение правильно отображает её движение. Так будет до тех пор, пока N не нарастёт до $n/2 = 12$ об/с. Тогда лопасть между кадрами поворачивается ровно на пол-оборота, и по кинокадрам нельзя определить, в какую сторону она совершает эти пол-оборота. При $24 > N > 12$ она совершает между кадрами более чем пол-оборота и представится вращающейся в противоположном направлении, причём с увеличением истинного числа оборотов кажущееся число уменьшается. Наконец, при $N = 24$ кажущееся число будет $N' = 0$. Лопасть кажется неподвижной. Связь между N и N' показана на рис. 64 ломаной OAB.

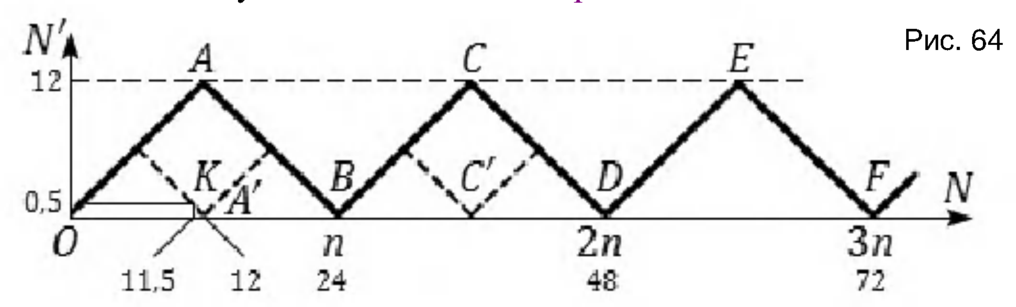


Рис. 64

А что же дальше? Дальше ломаная периодически повторяется: когда N дорастёт до $2n$, лопасть между кадрами будет успевать совершить ровно два оборота и на съёмку будет являться каждый раз в одном и том же положении. Поэтому при $N = 2n$ она опять будет казаться неподвижной ($N' = 0$, точка D). То же будет при $N = 3n$, $4n$ и т.д.

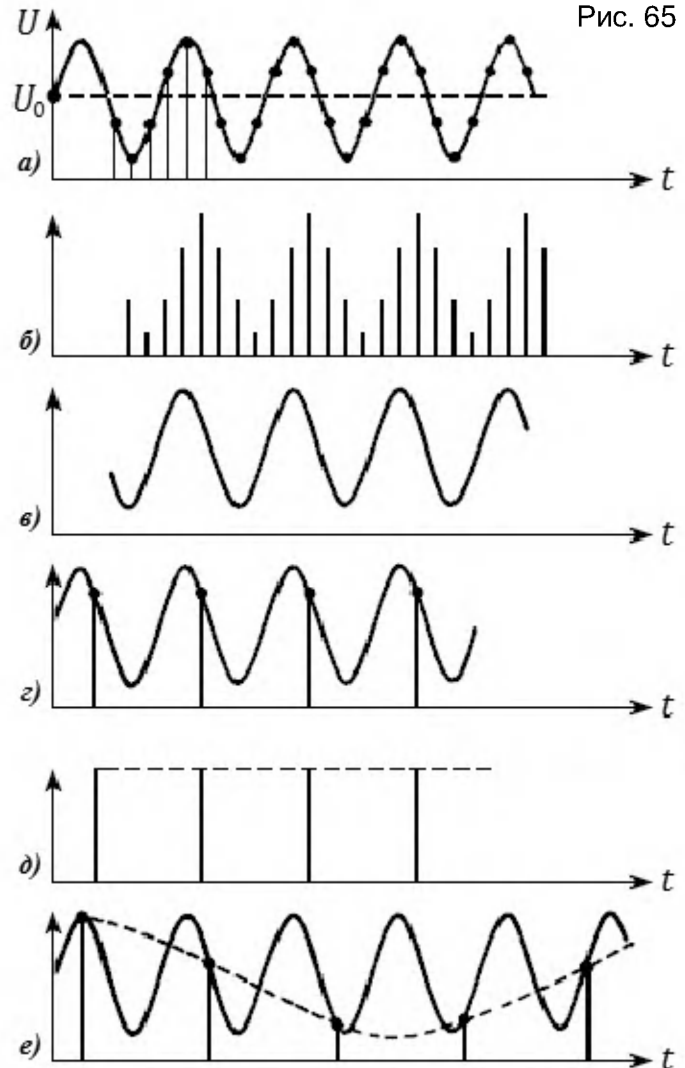
Отличить ситуацию F от ситуации B можно только при внимательном слежении за поведением изображения с самого начала вращения и при подсчёте числа переходов изображения через неподвижное состояние. Третье неподвижное состояние означает, что число оборотов в секунду в действительности равно $3n = 3 \cdot 24 = 72$. На практике, поскольку при съёмке затвор открывается на конечное время, то лопасть на снимке оказывается несколько размазанной. Изображение лопасти при $N = 3n$ отличается от изображения при $N = n$ тем, что размытость лопасти втрое больше.

Вы с приятелем наблюдали в фильме не одно-, а двухлопастный винт. Он будет казаться неподвижным, очевидно, при $N = \frac{n}{2}, n, \frac{3}{2}n, 2n, \ldots$ (точки A', B, C' пунктирной ломаной на рис. 64), так как для двухлопастного винта достаточно повернуться между кадрами на пол-оборота, чтобы два смежных кадра стали неразличимыми. Правда, если лопасти окрашены в разные цвета, то остаётся в силе первоначальная сплошная ломаная. Ваш приятель видел винт вращающимся со скоростью один оборот в две секунды в направлении, противоположном истинному (точка K на рис. 64), когда он заявил, что число оборотов равно 11,5.

В заключение заметим, что рассмотренные здесь искажения информации о движении и график $OABCDE$ рис. 64 имеют большое значение не только для кино и светотехники (задача «Огни в зеркале»), но и в любом случае, когда какое-нибудь не-

прерывное колебание наблюдается прерывисто. Если на вход линии связи поступает синусоидальное колебание частоты N, но по линии связи передаются только его отдельные (дискретные) значения с частотой n (т.е. n коротких импульсов в секунду, каждый из которых имеет амплитуду, равную соответствующему мгновенному значению непрерывного колебания), то по этим отдельным значениям можно полностью и безошибочно восстановить непрерывное колебание на приёмном конце линии только при условии, что $N < \frac{n}{2}$, т.е. что на каждый период синусоидального колебания приходится не менее двух передаваемых значений. В этом состоит смысл (здесь несколько упрощённый) одной из фундаментальных теорем теории информации – теоремы Котельникова.

На рис. 65*а* показан электрический сигнал (зависимость напряжения U от времени t), подлежащий передаче по линии связи. Он состоит из синусоиды и постоянной составляющей напряжения U_0. Пусть по линии связи передаются только те значения сигнала, которые отмечены точками (по шесть значений на период синусоиды). Иными словами, по линии связи передаются импульсы, показанные на рис. 65*б*. Приняв и должным образом продетектировав их, мы получим огибающую (рис. 65*в*), в точности повторяющую первоначальный непрерывный сигнал. Стоит, однако, нарушить требование теоремы Котельникова, как сигнал восстановить уже не удастся. На рис. 65*г* показан случай, когда по линии связи передаётся по одному импульсу за период сигнала ($n = N$, точка B на рис. 64). На выходе линии будут приняты импульсы постоянной амплитуды (рис. 65*д*), их огибающая (пунктир) совершенно не отражает форму передаваемого сигнала.



Если пойти ещё дальше и взять $n < N$, то в огибающей импульсов вновь появится синусоида (пунктир рис. 65*е*), но частота её будет далеко не равна первоначальной (сплошная кривая рис. 65*е*). Эту частоту можно определить по графику рис. 64.

Теория информации имеет множество практических применений: проводная и радиосвязь, телеметрия, радионавигация, гидролокация, телевидение, кино, вычислительная техника и т.д. И везде для неискажённой передачи или обработки информации требования теоремы Котельникова должны быть соблюдены.

53. Порядок среди беспорядка

А

Перед вами фотография диска с нанесёнными на нём одинаковыми чёрными кружка́ми (рис. 66). Впечатление такое, что в расположении кружков нет никакого порядка. Однако на самом деле здесь есть несколько кружков, нанесённых строго закономерно, равномерно по окружности диска. Найдите этот порядок среди беспорядка.

Б

Если вы не придумаете ничего лучшего, чем вооружиться циркулем и чертить концентрические окружности, то задача вам наскучит раньше, чем вы доведёте её до конца. Кстати, чтобы удержать вас от этого примитивного пути, диск умышленно снят наискосок. Чтобы вас заинтриговать, придется немного приоткрыть карты. Взгляните на фотографию, приведённую на рис. 67. Она снята с того же диска и отчётливо показывает шесть упорядоченных кружков («сигналов») на фоне хаоса («помех»). Как получена эта фотография?

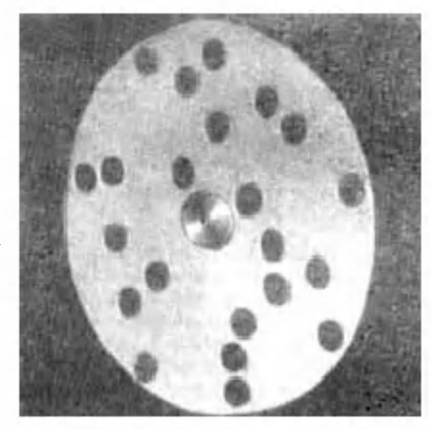


Рис. 66

Считайте, что на обоих фото вы видите не позитивы, а негативы истинного диска.

В

Судя по тому, что шесть упорядоченных кружков оказались густо-чёрными, а остальные – бледно-серыми, выдержка при фотографировании первых была больше, чем при фотографировании остальных. Но ведь невозможно для одних кружков затвор фотоаппарата открыть на большее время, а для других – на меньшее, тем более что пока не известно, для каких именно кружков это надо делать. Видимо, сами кружки́ каким-то образом управляли выдержкой для себя. Кстати, серых кружков на рис. 67 оказалось в несколько раз больше, чем их было на первоначальном рис. 66. Так могло получиться, если кружки́ экспонировались на один и тот же кадр в нескольких положениях. Следовательно, диск во время съёмки вращался.

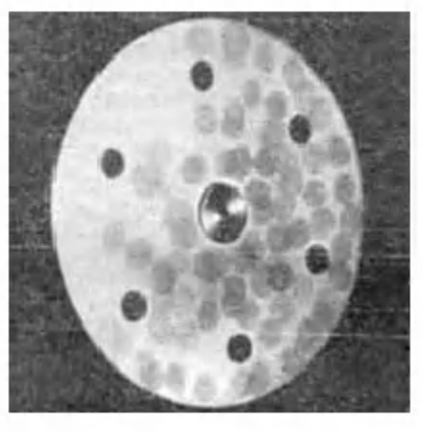


Рис. 67

Но это ещё не ответ. Если бы диск вращался, пока открыт фотозатвор, то на снимке каждый кружок размазался бы в дугу, как это произошло со звёздами в задаче «А всё-таки она вертится!». Видимо, за время съёмки затвор открывался на короткие мгновения несколько раз… Всё ясно!! Ну и ловкач же фотограф! Он снял диск на один кадр шесть раз, поворачивая его между съёмкой каждый раз на 60°. И поэтому все кружки́, расположенные упорядоченно через 60°, экспонировались 6 раз точно на место своих предшественников и получились яркими (т.е. на негативе гус-

то-чёрными), а беспорядочные экспонировались каждый раз на новое место и получились в шесть раз бледнее, причём их число на снимке возросло в шесть раз.

Как ни лестна фотографу похвала, но ему следует без ложной скромности признаться, что он ещё больший ловкач, чем вы думаете. Легко вам назвать цифру 60°, когда вы видите готовенький результат – второе фото. А как фотограф узнал, что диск между съёмками нужно поворачивать на 60°? Ведь для этого надо знать, что число упорядоченных кружков равно шести, а не пяти, не четырём… Ладно, поскольку вы уже немало потрудились, остальное можно раскрыть.

Диск действительно вращался. Но, кроме того, во время съёмки его освещали прерывистым светом (прерывистый свет можно получить и от непрерывного источника, Солнца, например, если на пути его лучей поставить вертушку с непрозрачными лопастями). За один оборот диск освещался шесть раз короткими, почти мгновенными вспышками. Фотозатвор же был открыт в течение всего оборота, что в сочетании со вспышками света равносильно угаданному вами периодическому открыванию затвора шесть раз.

Ну, а как фотограф узнал, что частота вспышек должна быть ровно в шесть раз выше частоты вращения диска? Очень просто: он перепробовал все варианты. Просто? Да, просто, если механизировать выбор варианта. Надо менять частоту вращения вертушки от нуля на повышение при постоянной частоте вращения диска. При этом диск будет виден то вращающимся, когда часто́ты не кратны, то неподвижным, когда они кратны (см. задачу «Винт самолёта в кино»). В частности, при равных частотах диск кажется неподвижным в своём естественном виде, как на рис. 66 (первая слепая скорость), т.е. все кружки́ одинаково черны.

Увеличивая частоту вертушки (стробоскопа) вдвое, мы обнаружим, что шесть кружков ярче других, а остальные раздвоились и стали вдвое бледнее; при трёхкратном соотношении частот шесть кружков вновь обнаружились, а остальные стали бледнее втрое и число их утроилось. При четырёх- и пятикратном соотношениях частот картина менее выразительна. А при шестикратном будет достигнут максимальный контраст картины – шестикратный. Раздробить помеху более чем в шесть раз (без раздробления сигнала) не удастся: 12-, 18-, 24-кратное соотношения дадут тот же шестикратный контраст.

Вернувшись к 6-кратному соотношению, сделаем вращение вертушки равномерным и сфотографируем диск. И вот результат: периодическая структура чётко видна на фоне случайных помех.

Имеет ли это явление практическое применение? Чрезвычайно широкое. Кино, телевидение, связь, радиолокация используют этот принцип на каждом шагу. Но мы начнём с наиболее наглядного примера, хотя область его применения ограничена.

Представьте, что археологи нашли тарелку, расписанную древним художником. На ней столько царапин и пятен, что узор не обнаруживается. Вы уже догадались, что над этой тарелкой сто́ит провести описанный выше эксперимент (только вращать её не следует: нельзя рисковать уникальной находкой, лучше привести во вращение её фотографию). Если в узоре есть симметрия относительно центра вращения, то она будет обнаружена.

Теперь пример из кино. Пусть в течение хотя бы одной секунды нам показывают неподвижный пейзаж. Это значит, что изображение (полезный сигнал) во всех соседних 24 кадрах одинаково. Но, кроме изображения, в каждом кадре имеются де-

фекты: зернистость плёнки, царапины, прилипшие пылинки. Все эти дефекты в каждом кадре глубоко индивидуальны, случайны. На экране за секунду мы увидим 24 раза одинаковые (полезные) сигналы и только один раз каждый из дефектов, которые неодинаковы и появляются вразнобой по времени и месту. Это существенно улучшает отношение сигнала к помехам. Изображение в кино кажется намного чище, чем мы его видели бы, разглядывая отдельный кинокадр, – вы это сами можете проверить, когда из-за неисправности кинопроектора на экране остановится один кадр.

То же самое имеет место в телевидении: сигналы в смежных кадрах (для неподвижных объектов) одинаковы, а случайные «снежинки» помех различны. Инерционность нашего зрительного восприятия поможет накопить впечатление от сигнала с нескольких кадров, и он будет виден лучше, чем помехи.

Заметим, что это только малая часть той пользы, которую извлекают в телевидении из принципа накопления. Более фундаментально накопление используется на передающем конце, в телевизионной передающей трубке, где первоначальное малое отношение сигнала к помехам улучшается за счёт накопления приблизительно в миллион раз.

И, наконец, пример из радиолокации. Рассмотрим его несколько глубже, так как он универсален и имеет большое значение для всех областей техники, связанных с теорией информации. Впрочем, тот, кто устал, может его пропустить.

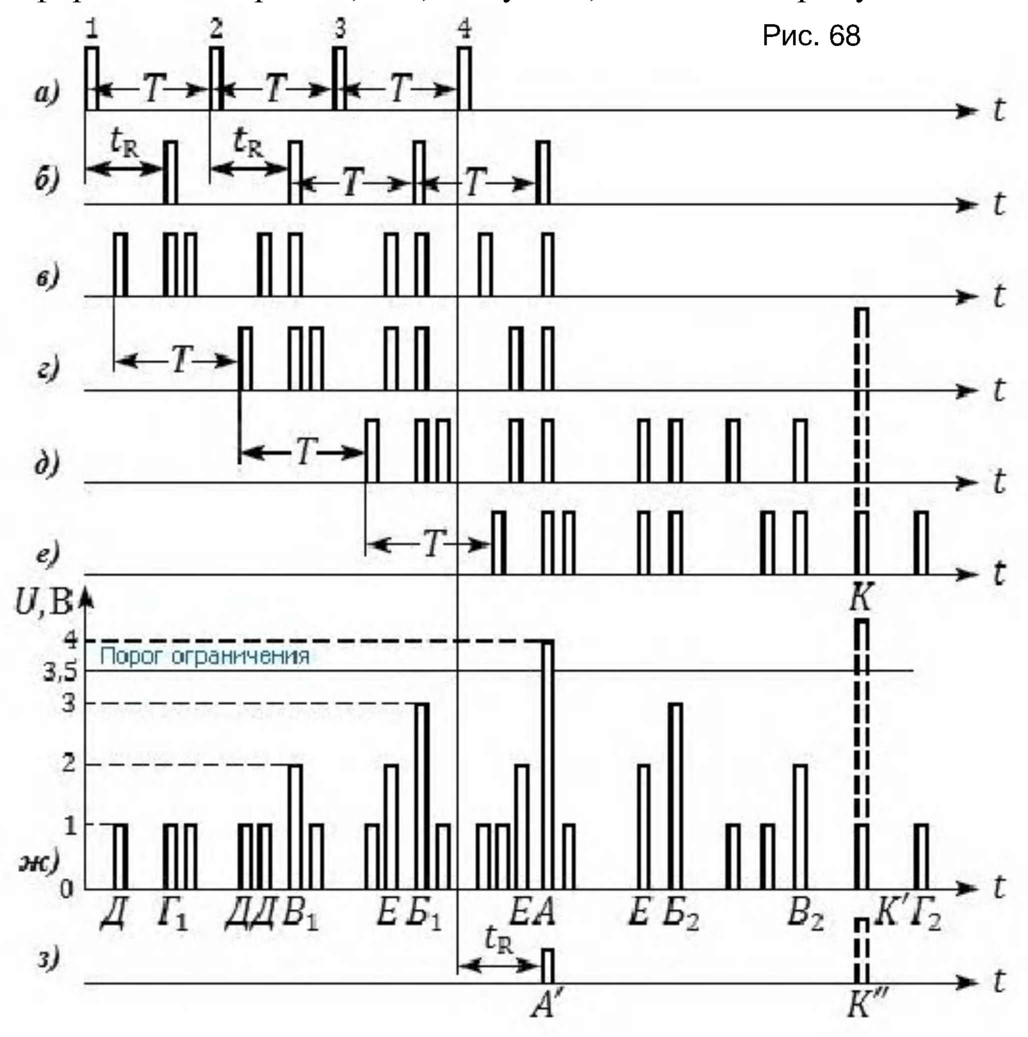


Рис. 68

Пусть радиолокатор (рис. 68) посылает четыре зондирующих импульса (лента а), следующих друг за другом с определённым периодом T. От облучаемого объекта вернутся четыре отражённых импульса (лента б), следующих с тем же периодом T,

но запаздывающих каждый относительно своего зондирующего на время t_R. Измерив это запаздывание, мы измерим расстояние до отражающего объекта.

Теперь представьте, что вместо сигналов **б** вы получили смесь сигналов и помех (лента **в**). Задача измерений сильно осложнилась бы: все импульсы одинаковы; какие из них полезные, какие помехи – на первый взгляд отличить невозможно.

Попробуем применить только что освоенный нами принцип накопления. Запишем принятые сигналы **в** на четырёх экземплярах магнитной ленты (**в**, **г**, **д**, **е**) и сместим их друг относительно друга на отрезок, соответствующий периоду повторения T[1] (этот период мы знаем, так как сами его создавали, посылая зондирующие импульсы). Сложим сигналы со всех четырёх лент (перепишем совместно все четыре сдвинутые ленты на пятую). Результат сложения показан на ленте **ж**.

В момент, когда импульс имеется на всех четырёх лентах, на пятой мы получим импульс A учетверённой амплитуды (например, 4 вольта). В моменты, когда импульс имеется только на трёх лентах, на пятой получим импульсы $Б_1$ и $Б_2$ утроенной амплитуды, и т.д. Помехи записаны на всех лентах, но они случайны, интервалы между ними не равны T, поэтому при сдвиге лент на T они не совпали друг с другом (то же было на диске, на кинокадре) и поэтому не сложились (импульсы $Д$ на ленте **ж** с амплитудой 1 вольт). Правда, одна из помех ленты **в** чисто случайно совпала с помехой ленты **г** и дала на ленте **ж** импульс E двойной амплитуды (то же произошло кое-где и со случайными кружка́ми на диске, см. рис. 67). Вероятность такого совпадения мала. Ещё меньше вероятность совпадения помех на трёх лентах. И уже совсем маловероятно совпадение на всех лентах (особенно если их много, например, двадцать). Таким образом, совпадение на всех четырёх лентах свидетельствует с большой уверенностью, что это сигнал.

Отбросим все импульсы, амплитуды которых меньше 4 вольт, и сохраним остальные (это можно сделать с помощью ограничителя – устройства, пропускающего только сигналы, превосходящие некоторый порог ограничения, например, 3,5 В). Этим самым мы отбросим все помехи и оставим только сигнал A' (лента **з**). Сравнивая его положение на оси времени с положением последнего зондирующего импульса (4 на ленте **а**), мы определим запаздывание t_R (лента **з**) и по нему – расстояние.

Разумеется, в радиолокаторе и запись, и считывание ведутся автоматически и непрерывно, результаты выдаются немедленно.

Между прочим, магнитная лента – не лучшее из того, чем располагает радиолокация. Здесь она употреблена только для наглядности.

И последний вопрос: а что, если помеха придёт сильная, вчетверо больше сигнала (лента **е**, импульс K, показанный пунктиром)? Тогда она одна, ни с чем не складываясь, достигнет порога ограничения (K' на ленте **ж**) и появится на выходе (K'' на ленте **з**). Этот же вопрос применительно к диску: а что, если бы один из случайных кружков на рис. 66 был вшестеро ярче других? Тогда он один при вращении диска дал бы на рис. 67 шесть кружков, по яркости равных сигналу и равномерно расположенных по кругу.

Ответ прост: такой кружок мы заметили бы ещё на неподвижном диске и могли бы заретушировать так, чтобы он не выпячивался среди остальных. Этот же ответ

[1] Подбор правильного смещения (до совпадения импульсов) равносилен подбору нужного числа оборотов диска, описанному в начале задачи.

применительно к радиолокатору: можно было бы с помощью ещё одного ограничителя подравнять амплитуды всех импульсов **в**, **г**, **д**, **е** ещё до сложения. Этим мы лишили бы помеху её амплитудного преимущества, сохраняя за сигналом преимущество коллектива, против которого одиночная помеха бессильна.

54. Смотри на круги

А

В большой круглой миске – вода. Вы роняете в воду плавучий предмет (хлебную крошку и т.п.), стараясь попасть в центр. Как без инструментов проверить, насколько вам это удалось?

Б

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 156

Проделайте этот эксперимент. Если вы наблюдательны, то он вам подскажет способ проверки. Впрочем, исчерпывающей подсказкой является мысль Пруткова. Круги легче наблюдать, когда в зеркале воды отражается что-либо пёстрое (листва деревьев, облака и др.). Если отражается чистое небо, то горбы и впадины волн не отличить от наклонных участков, т.е. картина волн наблюдается с большим трудом.

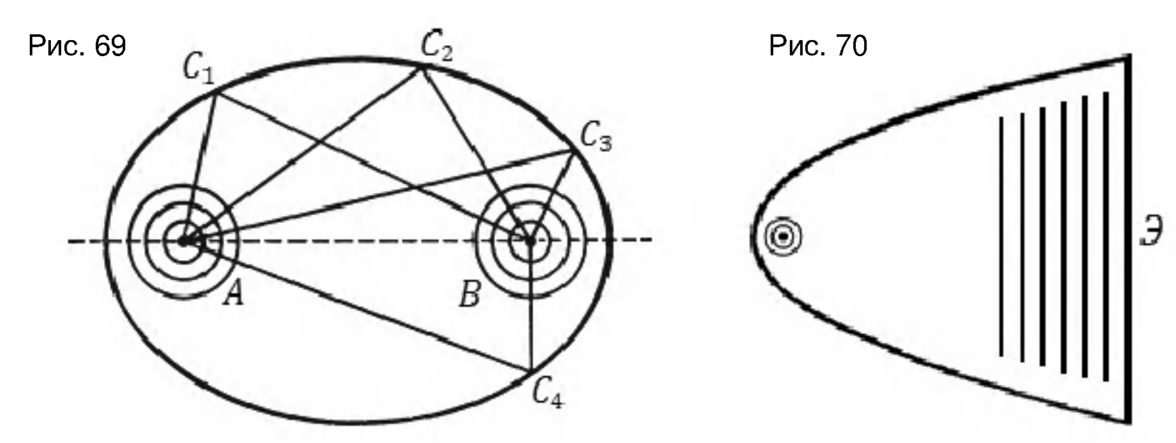
В

Нужно наблюдать за *отражённой* волной. Если крошка упала точно в центр, то возбуждённая ею круговая волна достигнет краёв миски одновременно во всех точках. Благодаря этому отражённая волна тоже будет круговой и, распространяясь от краёв к центру, сфокусируется точно в месте своего возникновения, отмечаемом плавающей крошкой.

Если же крошка не попала в центр, то отражённая волна сфокусируется не в центре, а в точке, находящейся по другую сторону от центра, симметрично с крошкой. Это позволит вам немедленно уточнить второй бросок: вторую крошку нужно бросить посредине между точками исхода и схождения волн.

Строго говоря, отражённые волны фокусируются в точку только при условии, что вы попали крошкой точно в центр. При любом другом положении источника колебаний фокусировка в круглой миске будет несовершенной: отражённые волны не будут точными кругами и будут сходиться уже не в одной точке, а на некотором отрезке. Это легко заметить, если крошку уронить достаточно далеко от центра. Однако и в этом случае картина волн покажет, в какую сторону и как сильно вы отклонились.

Если бы миска была эллиптической (блюдо), то для получения круговой отражённой волны нужно было бы попасть крошкой в один из фокусов эллипса (рис. 69). Тогда отражённые волны сошлись бы во втором фокусе. Именно таково свойство эллипса: ломаная ACB, соединяющая фокусы эллипса A и B с любой точкой эллипса C, имеет постоянную длину.



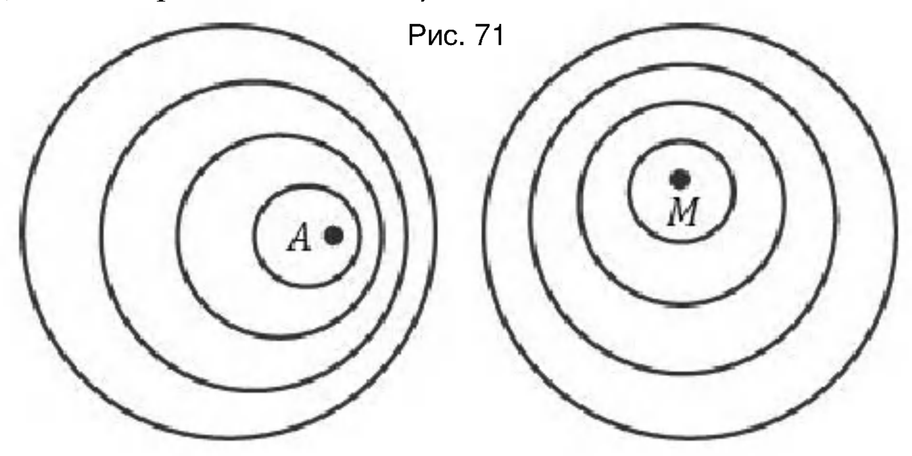
Если бы сосуд имел параболическую форму (таких не бывает, так как парабола – незамкнутая кривая) и вы бросили бы крошку в фокус параболы, то отражённые волны были бы не кривыми, а прямолинейными (рис. 70), т.е. фокусировались бы в бесконечности. Картина будет тем отчётливее, чем дальше от фокуса экран *Э*, замыкающий сосуд.

55. Пловцы и волны

А

Перед вами «снимок» глади озера сверху (рис. 71). Точки – пловцы, окружности – волны. Куда плывут пловцы? Какой из пловцов плывёт быстрее? Какова скорость пловцов, если скорость волн 0,5 м/с?

Рис. 71



Б

Отыщи всему начало, и ты многое поймёшь.
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 92*а*

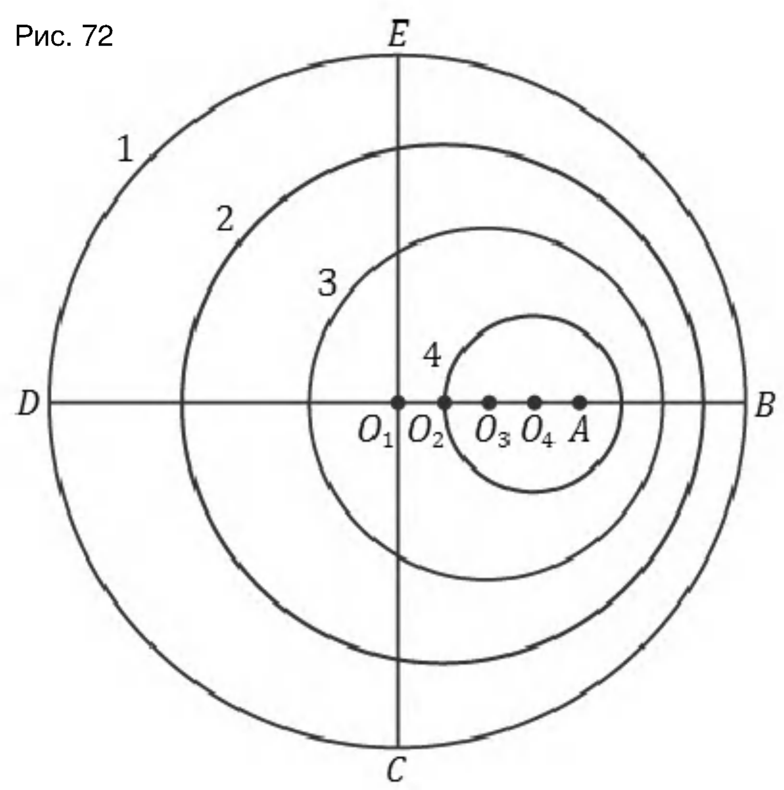
Найдите точки, в которых находились пловцы в начале заплыва. Стоп! Дальше не читать! Подумайте!

Если ничего не придумали, читайте дальше. Скорость волны одинакова по всем направлениям. Поэтому волна и является окружностью: от той точки, где она возникла (центра окружности), она прошла по всем направлениям одинаковое расстояние. Очевидно, самая первая волна успела продвинуться дальше всех. Значит, это окружность наибольшего радиуса. Центр этой окружности и есть место старта пловца. Теперь вы без труда ответите на поставленные вопросы.

В

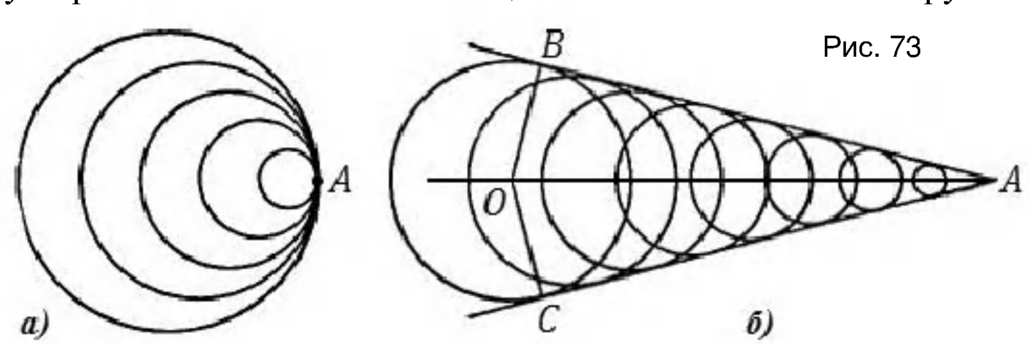
Каждая волна создаётся пловцом. Очевидно, центры всех окружностей изображают последовательные положения пловца. Центр самой большой окружности O_1 (рис. 72) изображает первоначальное положение пловца. Следовательно, пловец A (рис. 71) плывёт вправо, пловец M – вперёд (на чертеже – вверх). За время, за которое пловец проплыл из точки O_1 в A, волна 1 прошла расстояние $O_1B = O_1C = O_1D = O_1E$. Расстояние O_1B, как следует из измерений по рисунку, вдвое больше расстояния O_1A. Следовательно, скорость пловца A вдвое меньше скорости волны, т.е. равна 0,25 м/с. Аналогично измеряем скорость пловца M. Она ещё меньше – 0,125 м/с.

Рис. 72



Оценим теперь качественно картину волн в зависимости от скорости пловца. Если пловец барахтается на месте, он создаёт концентрические кольца волн. Если он движется, то волны сгущаются в том направлении, куда он плывёт, и разрежаются в противоположном направлении. Сгущение тем сильнее, чем больше скорость пловца. Так будет до тех пор, пока скорость пловца не сравняется со скоростью волн. Тогда все окружности – большие и малые – касаются друг друга в одной точке, а именно в той, в которой находится пловец (рис. 73*а*). Если пловец движется быстрее волн, то картина оказывается сложнее (рис. 73*б*). Наиболее отчётливо в ней виден клин из двух прямых волн AB и AC – общих касательных ко всем круговым волнам.

Рис. 73



Внутри же клина картина очень запутана: здесь в отдельных местах гребень одной волны складывается с гребнем другой и получается более высокий гребень, в других же местах складываются две впадины, в третьих – гребень одной с впадиной другой. И только на прямых AB и AC мы имеем простую картину: вдоль этих прямых выстроились гребни всех кольцевых волн.

Построив точку старта O и соединив её с A и B, мы получаем прямоугольный треугольник OAB, у которого гипотенуза OA изображает путь, пройденный пловцом, а катет OB – путь, пройденный волной за то же время t. Если обозначить угол BAC буквой α, то

$$\frac{OB}{OA} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Разделив числитель и знаменатель левой части на t, мы получаем слева отношение скоростей волны $v_в$ и пловца $v_п$. Таким образом, скорость пловца можно найти по формуле

$$v_п = \frac{v_в}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Чем острее клин (меньше α), тем больше скорость пловца.

Отметим, что аналогичный клин звуковых волн создаётся у самолёта, летящего со скоростью, большей скорости звуковых волн (со сверхзвуковой скоростью). Этот клин (точнее, поверхность конуса, поскольку в этом случае речь идёт о движении волн в среде с тремя измерениями), набегая на наблюдателя, создаёт у него впечатление орудийного выстрела, после которого наблюдатель, находясь уже внутри конуса, начинает слышать обычный звук самолёта.

Рис. 74

Такой конус показан на рис. 74 (*а* – вид сбоку, *б* – вид сверху). На поверхности конуса давление выше, чем снаружи и внутри. Вблизи самолёта перепад давления может достигать значительной величины, зависящей от высоты полёта, типа машины, её скорости; поэтому ударная волна низко летящего сверхзвукового самолёта может произвести заметные разрушения. Но при высоте полёта более 10 000 м волна достигает земли с давлением, превышающим атмосферное не более чем на доли процента.

Земной наблюдатель D видит самолёт A в зените, но не слышит его звука; на наблюдателя C в данный момент набегает поверхность конуса с повышенным давлением, и он слышит «выстрел». Наблюдатель E находится внутри конуса, он слышал «выстрел» в момент, когда самолёт находился в точке A', а сейчас слышит обычный гул самолёта.

Часто удаётся различить, что «выстрел» двойной: второй удар происходит от хвостовой волны XYZ (на поверхности этого конуса давление ниже, чем снаружи и внутри).[1]

Линия пересечения конуса и плоской поверхности земли – гипербола NCM, во всех точках которой «выстрел» слышен одновременно. Она отделяет зону K, в которой самолёт ещё не слышен, от зоны L, в которой он уже слышен. Эта гипербола движется по земле со скоростью самолёта. Кстати, не поленитесь вычислить эту скорость, исходя из того, что на рисунке $\alpha = 100°$.

Обратите внимание, что приведённая формула при $v_п < v_в$ даёт

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{v_в}{v_п} > 1\,,$$

что невозможно. Не надо думать, что это ставит под сомнение правильность формулы. Наоборот, своим экстравагантным поведением формула предостерегает читателя, чтобы он держал ухо востро: область применения формулы кончилась, при $v_п < v_в$ картина волн меняется не только количественно, но и качественно, клин волн исчезает, угол α теряет физический смысл, картина волн становится подобной рис. 71.

56. Волны и поплавки

А

Эта задача является продолжением предыдущей. Пусть впереди и позади пловца на воде лежат поплавки, покачивающиеся на проходящих под ними волнах. Сколько колебаний в минуту совершает каждый из поплавков, если пловец создает 120 волн в минуту (120 взмахов руками)? Как меняется частота колебаний поплавков, если изменяется скорость пловца? Будем при этом предполагать, что частота взмахов рук остаётся прежней, а скоростью пловец управляет за счёт того, что делает взмахи более или менее энергичными.

Б

Из рис. 75 видно, что длина волны λ_1, распространяющейся к первому поплавку A_1, больше длины волны λ_2, идущей ко второму поплавку A_2. Удобно начинать расчёт с того, чтобы найти λ_1 и λ_2.

В

Введём обозначения: f_0 – частота колебаний, создаваемых пловцом; $v_п$ – скорость пловца; $v_в$ – скорость волн. Найдём расстояния BC и BD от пловца B до n-й волны в направлениях к поплавкам A_1 и A_2. Центр окружности, изображающей n-ю волну, является точкой O, в которой находился пловец вместе с этой волной (в момент рождения волны).

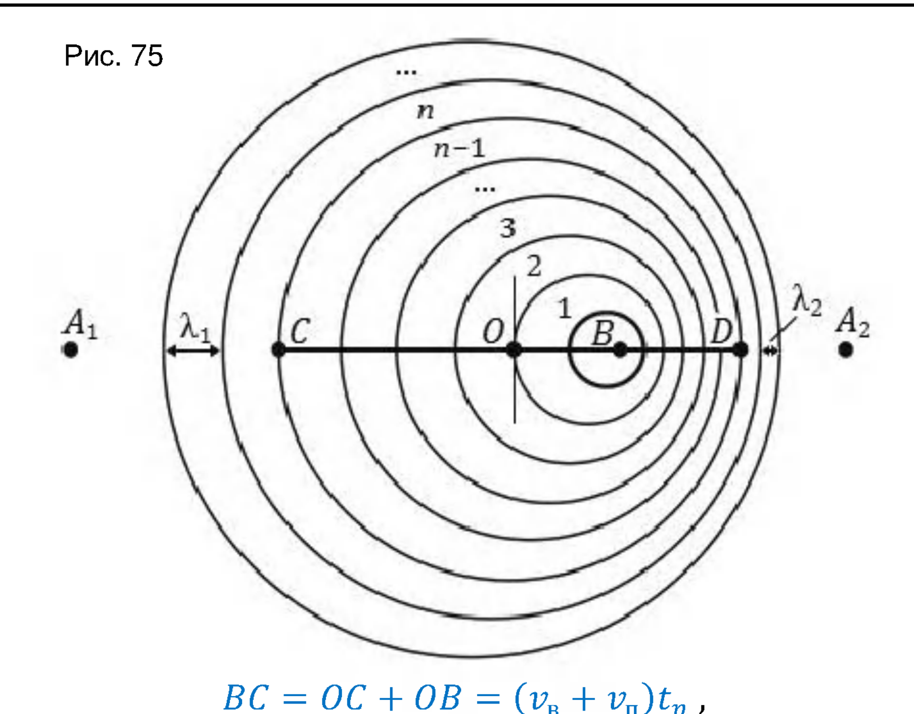
Из рисунка видно, что

$$OC = OD = v_в t_n\,, \quad OB = v_п t_n\,,$$

где t_n – время, протекшее с момента рождения n-й волны. Следовательно,

[1] Более подробно об этом явлении можно прочесть в брошюре: *Миронов А.Д.* Сверхзвуковой «хлопок» самолёта. – М.: Воениздат, 1964.

Рис. 75



$$BC = OC + OB = (v_в + v_п)t_n\,,$$

$$BD = OD - OB = (v_в - v_п)t_n\,.$$

С другой стороны,

$$BC = n\lambda_1\,,\quad BD = n\lambda_2\,.$$

Таким образом,

$$n\lambda_1 = (v_в + v_п)t_n\,,\quad n\lambda_2 = (v_в - v_п)t_n\,.$$

Разделив левые и правые части этих формул на n и учитывая, что

$$\frac{n}{t_n} = f_0\,,$$

имеем

$$\lambda_1 = \frac{v_в + v_п}{f_0}\,,\quad \lambda_2 = \frac{v_в - v_п}{f_0}\,.$$

Частота колебаний поплавка A_1, очевидно, равна

$$f_1 = \frac{v_в}{\lambda_1} = f_0\frac{v_в}{v_в + v_п}\,,$$

а поплавка A_2

$$f_2 = \frac{v_в}{\lambda_2} = f_0\frac{v_в}{v_в - v_п}\,.$$

Периоды же их колебаний равны соответственно

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_0}\cdot\frac{v_в + v_п}{v_в} = T_0\left(1 + \frac{v_п}{v_в}\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_0}\cdot\frac{v_в - v_п}{v_в} = T_0\left(1 - \frac{v_п}{v_в}\right).$$

Пловец создает 120 волн в минуту, или 2 волны в секунду, т.е. $f_0 = 2$ Гц. Если $v_в = 0{,}5$ м/с и $v_п = 0{,}25$ м/с, то

$$\lambda_1 = \frac{0{,}5 + 0{,}25}{2} = 0{,}375 \text{ м} = 37{,}5 \text{ см}\,,$$

$$\lambda_2 = \frac{0{,}5 - 0{,}25}{2} = 0{,}125 \text{ м} = 12{,}5 \text{ см}\,,$$

$$f_1 = 2\cdot\frac{0{,}5}{0{,}5 + 0{,}25} = 1{,}33 \text{ Гц } (80 \text{ колебаний в минуту})\,,$$

$$f_2 = 2 \cdot \frac{0{,}5}{0{,}5 - 0{,}25} = 4 \text{ Гц}$$ (240 колебаний в минуту) .

Теперь можно подвести итоги. Частота колебаний поплавка A_1, от которого источник колебаний (пловец) удаляется, ниже частоты колебаний f_0 источника. Частота колебаний f_2 поплавка A_2, к которому источник колебаний приближается, выше частоты колебаний источника. Это явление представляет собой не что иное, как известный из других областей физики эффект Доплера. Сам Доплер открыл его в акустике: тон гудка паровоза выше, пока паровоз приближается к наблюдателю, но сразу же понижается, когда паровоз, пройдя мимо наблюдателя, начинает удаляться от него.

Картина волн на воде осложняется тем, что пловец создаёт волны не только руками, но и ногами. Кроме того, на поверхности воды скорость волны несколько зависит от её длины. Поэтому круги на воде вокруг пловца будут не совсем точными.

57. Письма с дороги

А

Уезжая из Ленинграда во Владивосток, вы пообещали своему другу, что будете посылать ему письма с дороги каждые два часа. Вы точно держите своё слово. Почта работает идеально: почтовый самолёт каждые два часа пролетает мимо окна вашего вагона, подхватывает ваше письмо, мчится к окну вашего ленинградского друга и сбрасывает письмо через форточку на стол. Тем не менее, ваш друг упрекает вас в том, что вы не выполняете своего обещания. Как вы объясните те таинственные силы, которые вмешались в переписку?

Б

Предупреждение: не привлекайте, пожалуйста, для объяснения теорию относительности. В век космических скоростей всем известно, что в движущемся объекте время течёт медленнее, чем в неподвижном. Но этот эффект становится заметным только при скоростях, близких к скорости света. А так как скорость поезда даже отдалённо не напоминает скорость света, то сомнительно, что ваш друг обнаружит это замедление переписки, даже если он обладает наилучшей измерительной аппаратурой.

Если вы ещё не догадались, в чём дело, то вам поможет знание того факта, что если вы одновременно (двумя разными самолётами) посылаете письма в Ленинград и Владивосток, то ваш владивостокский друг сообщит вам, что вы перевыполняете своё обещание.

В

Удобнее всего начать с числового примера. Пусть скорость поезда $v_п = 100$ км/ч, скорость почтового самолёта $v_с = 500$ км/ч. Первое письмо отправлено вами через 2 часа после расставания, т.е. с расстояния 200 км. Самолёт доставит его за $\frac{200}{500}$ часа, т.е. за 24 минуты. Таким образом, ваш друг получит его через 2 ч 24 мин.

Второе письмо он получит через 4 ч 48 мин после расставания, и т.д. Вы отправляете письма каждые два часа, а ваш друг получает их с периодом 2 ч 24 мин.

Обозначим период между двумя отправлениями писем через T_0. За это время вы удаляетесь от друга на расстояние $v_п T_0$. Самолёт потратит на преодоление этого дополнительного пути время

$$\frac{v_п T_0}{v_с}.$$

В результате период между двумя получениями письма равен

$$T_1 = T_0 + \frac{T_0 v_п}{v_с} = T_0\left(1 + \frac{v_п}{v_с}\right).$$

Сравните эту формулу с той, которую мы получили в предыдущей задаче. Они совпадают, потому что и задачи фактически совпадают, если не делать различия между письмами и волнами, пловцом, удаляющимся от поплавка, и поездом, удаляющимся от Ленинграда. При этом скорость поезда заменяет скорость пловца, скорость самолёта – скорость волн. Поплавок впереди пловца получает волны чаще, чем пловец их создаёт, так же как ваш владивостокский друг получает письма чаще, чем вы их посылаете. Это всё тот же эффект Доплера. Не будем обсуждать вопрос, куда деваются недополученные и откуда берутся лишние письма: в этом вы легко разберётесь сами.

Эффект Доплера имеет место в любом случае, когда источник периодических сигналов и приёмник движутся друг относительно друга: в акустике, в волнах на воде, в частоте получения писем. Наиболее широкое практическое применение эффект Доплера получил в оптике и радиотехнике. Астрономы по доплеровскому смещению линий спектра определяют скорости движения звёзд и межзвёздных облаков водорода. Радисты по доплеровскому изменению частоты сигналов передатчика спутника определяют его скорость, направление полёта и расстояние, на котором он пролетает.

Сигнал, посылаемый радиолокатором на самолёт, отразившись от него, возвращается в радиолокатор с удвоенным доплеровским сдвигом частоты (частота сдвигается при прохождении сигнала к цели и обратно; для сравнения можете разобрать случай, когда вы пишете письма из поезда, а ваш ленинградский друг немедленно посылает вам ответные письма). Сравнивая частоту посланного радиосигнала с частотой принятого отражённого, определяют скорость самолёта. Радиолокатор может быть расположен на самолёте и облучать земную поверхность. Тогда по доплеровскому сдвигу отражённого сигнала на самолёте определяют собственную скорость относительно земной поверхности.

58. Дорожные ритмы

А

Вы стоите у железнодорожного полотна и слушаете ритмичный перестук колёс проходящего поезда. Ваш товарищ едет в этом поезде и тоже слушает этот перестук. Одинаковы ли оба темпа наблюдаемых перестуков (числа ударов в единицу времени) или один из них быстрее другого? Одинаковы ли оба ритма (равномерные, прерывистые)?

Б

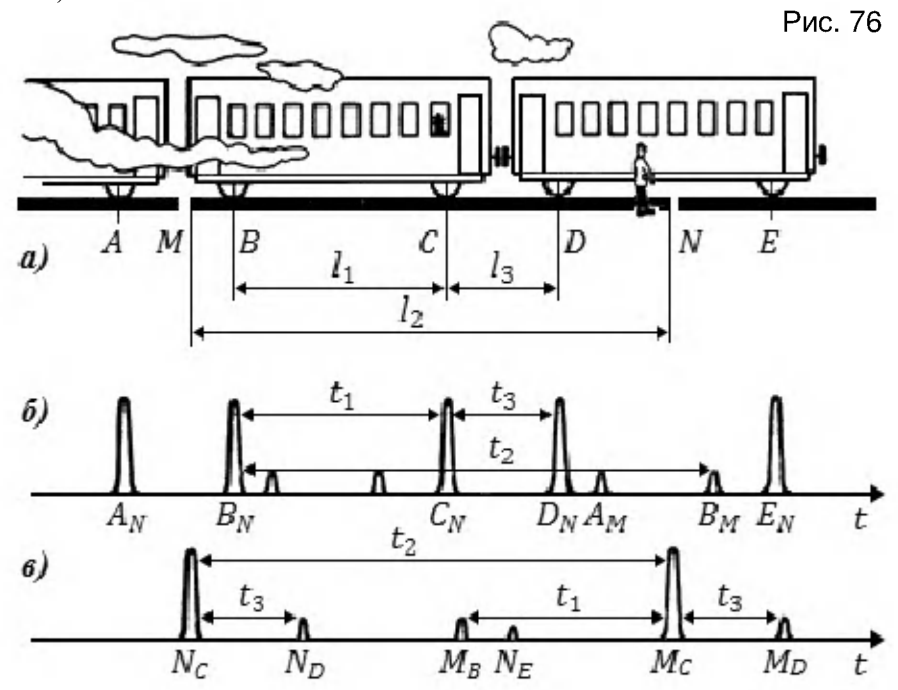
Могу побиться об заклад, что многие читатели уже смекнули: тут замешан эффект Доплера. Более того, самый дотошный читатель вспомнил даже об эффекте Эйнштейна (замедление хода времени в движущемся объекте). Не будем останавливаться на этих явлениях, важных в других случаях, но не имеющих существенного значения для нашей задачи. Всё гораздо проще. Эффект, который вы должны обнаружить, намного весомее: наблюдаемые вами и вашим товарищем темпы перестука могут различаться вдвое-втрое, а не на какие-то там доли процента.

Напомним, что ритмичный перестук (на фоне более или менее равномерного шума) возникает из-за периодического набегания колёс вагонов на периодически расположенные вдоль пути стыки рельсов (этим создается главный, наиболее отчётливый ритм). Отсюда следует любопытный факт: источник звука движется… и не движется, поскольку звук происходит от удара движущегося (поступательно) колеса о неподвижный рельс (для вагонного наблюдателя – от удара «неподвижного» колеса о «движущийся» рельс). Как здесь проявится эффект Доплера, стоило бы разобраться, но это уж как-нибудь в другой раз…

В

Вы слушаете удары колёс, поочередно набегающих на ближайший к вам стык; ваш приятель слушает удары стыков, поочередно «набегающих» на ближайшее к нему колесо. Период t_1 между двумя наблюдаемыми с земли импульсами звука равен расстоянию от колеса до колеса l_1 делённому на скорость поезда (рис. 76*а*). Период t_2, наблюдаемый из поезда, равен длине рельса l_2, делённой на ту же скорость. В общем случае $l_1 \neq l_2$. Обычно $l_2 > l_1$, поэтому темп поезда для стоящего у полотна будет быстрым (allegro – на языке музыкантов), для едущего в вагоне – более умеренным (moderato).

Рис. 76



Теперь о ритмах. Расстояние l_1 между колёсами, принадлежащими одному вагону, не равно расстоянию l_3 между колёсами, относящимися к разным вагонам; поэтому наземный наблюдатель будет слышать неравномерный сбивчивый ритм. Ва-

гонный наблюдатель услышит равномерный ритм: дли́ны рельсов, следующих друг за другом, как правило, одинаковы. Впрочем, в тамбуре и на переходе из вагона в вагон ритм будет тоже сбивчивым, так как там будут слышны удары о стык колёс обоих вагонов.

На рис. 76*б* показана ориентировочно мощность звука как функция времени для наземного наблюдателя, стоящего у стыка N. Он слышит громкие удары колёс A, B, C, D, E о стык N в моменты A_N, B_N, C_N, D_N, E_N, разнесённые на интервалы t_1 и t_3, пропорциональные отрезкам l_1 и l_3.

На рис. 76*в* показана мощность звука для вагонного наблюдателя, стоящего у колеса C. Он слышит удары стыков N, M о колесо C в моменты N_C, M_C, разнесённые на интервал t_2, пропорциональный длине рельса l_2.

Разумеется, наземный наблюдатель слышит стук колёс не только о стык N, у которого он стоит, но и о другие стыки. Удары о стык M показаны на рис. 76*б* (A_M, B_M). Эти удары запаздывают по отношению к ударам A_N, B_N на время t_2 (плюс ещё время распространения звука в воздухе). Слышны они слабо: если наблюдатель находится в двух метрах от полотна (напротив стыка), а длина рельса 20 м, то удары о соседние стыки будут слышны примерно в 100 раз слабее (правда, если звук от стыка M идёт к вам не только по воздуху, но и по рельсу, то ослабление будет не таким сильным). Естественно, если наблюдатель находится на полпути между стыками, то звуковые импульсы A_N и A_M, B_N и B_M будут одинаковыми (правда, это ещё зависит от того, одинаковы ли оба стыка и одинаковы ли свойства колеса по его окружности). Тогда ритм и темп для наземного наблюдателя станут ещё более запутанными.

Всё это можно повторить и по отношению к вагонному наблюдателю. В частности, если вас не устраивает слышимый вами ритм, вы можете передвинуться вдоль вагона и услышать другой, более удачно аккомпанирующий вашей дорожной песне. Любители песни знают, что среди огромного числа уже написанных дорожных, попутных, путевых (и непутёвых) песен, широко использующих подражание стуку колёс поезда, нет двух песен с одинаковым ритмом. И, тем не менее, все эти имитации оказываются правдоподобными – настолько разнообразны натуральные дорожные ритмы.

Интересно, что если вы стоите не у самого полотна, а на расстоянии, соизмеримом с длиной поезда, то ритм поезда будет совершенно иным: вы будете слышать почти одинаково громко удары всех колёс обо все стыки.

Если вы хотите насладиться всем разнообразием ритмов поезда, то вам надо поспешить с наблюдениями: на железных дорогах начали устранять стыки рельсов. Рельсы свариваются в 800-метровые плети, укладываются на железобетонные шпалы – и путь становится «бархатным». Романтический перестук колёс уходит в сиреневую даль прошлого.

59. Быстрее звука

A

Самолёт летит со сверхзвуковой скоростью. Лётчик находится в носовой части фюзеляжа A (рис. 77), двигатели – на плоскостях, в точках B и C. Может ли лётчик слышать звук двигателей своего самолёта?

Б

– Не может! – в один голос заверяют все решающие эту задачу. – Мы уже знаем из задачи о пловцах и волнах (да и без вашей задачи мы это знали), что при полёте со сверхзвуковой скоростью звук двигателя можно услышать только внутри конуса, имеющего вершиной положение двигателя и расположенного позади двигателя. Два двигателя дают два конуса, заполненных звуком (B_1BB_2 и C_1CC_2 на рис. 77). Лётчик находится вне этих конусов и, следовательно, не может слышать звук двигателей.

Рис. 77

Но спросите-ка пилота сверхзвукового самолёта, и он вам скажет, что звук двигателей прекрасно слышен. Только не спрашивайте его – почему, а постарайтесь объяснить сами.

В

Звук может распространяться не только по воздуху, но и по корпусу самолёта. Скорость звука в воздухе – около 330 м/с, в дюралюминиевой обшивке самолёта – около 5000 м/с… Не торопитесь с выводами! Лётчик слышит звук не потому, что скорость самолёта ниже скорости звука в дюрале! Даже при скорости самолёта больше 5000 м/с звук будет слышен.

Дело в том, что между воздухом как средой, в которой распространяется звук, и корпусом самолёта есть существенная разница. Воздух, неподвижный относительно Земли, движется относительно источника звука (двигателя) и приёмника звука (лётчика); корпус же самолёта неподвижен относительно источника и приёмника звука. Поэтому звук, распространяющийся в воздухе, уносится вместе с воздухом назад, не достигая лётчика; звук, распространяющийся в корпусе летящего самолёта, идёт по корпусу точно так же, как он шёл бы в корпусе неподвижного самолёта. Таким образом, звук достигнет лётчика по корпусу при любой скорости самолёта[1].

Заметим, что поскольку самолёт наполнен воздухом, который движется вместе с ним, то по этому внутреннему, неподвижному относительно самолёта воздуху звук также может достичь кабины. Отсюда, кстати сказать, следует, что даже в космическом корабле, летящем со скоростью, намного большей скорости звука в воздухе и дюрале, звук работающих двигателей будет достигать всех отсеков корабля, в том числе и носового.

Другое дело, если летит рядом пара сверхзвуковых самолётов. Единственной акустической средой, связывающей их, является уносящийся назад воздух. В этом случае услышать звук соседнего самолёта невозможно. Для этого нужно было бы находиться внутри звукового конуса.

[1] Дискуссия, разгоревшаяся по поводу этой задачи («Наука и жизнь», 1967, № 1), была разрешена П. Барашевым единственно правильным способом – с помощью эксперимента. Описанный им в очерке «Стерегущие в ночи» («Правда», 22 декабря 1966 г.) новый полёт на сверхзвуковой скорости полностью подтвердил: лётчик слышит звук, потому что он доходит по металлу. Это же подтверждают и письма, присланные автору лётчиками.

После всего сказанного выше довольно курьёзным выглядит тот факт, что звук двигателей мог бы слышать тот, кто сумел бы лететь со скоростью самолёта впереди двигателя в точке D, хотя эта точка находится вне звуковых конусов двигателей и единственной акустической средой, связывающей эту точку с самолётом, является уносящийся назад со сверхзвуковой скоростью воздух. Дело в том, что, как показано выше, звук двигателей по обшивке самолёта добирается до самого носа фюзеляжа, а нос, уже как вторичный излучатель (ретранслятор), излучает небольшую долю звуковой энергии двигателей в воздух. Получается ещё один наполненный звуком конус, вершиной которого является нос самолёта. Точка D находится внутри этого конуса. Для точки E звук двигателей абсолютно недоступен.

60. Катер мчится по каналу [1]

А

Допустим, что вы живёте на берегу прямого канала с аккуратно облицованными стенками (в Ленинграде на Фонтанке, например). Вы выглянули в окно и видите, что вся гладь канала взбудоражена мечущимися между стенками волнами, сходящимися и расходящимися, образующими красивый живой узор. Основные волны этого

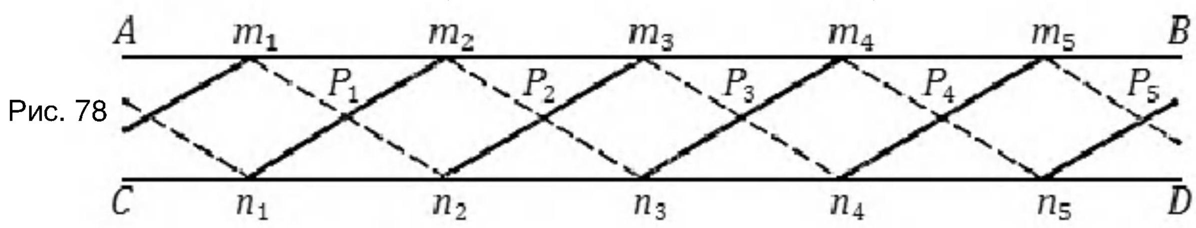


Рис. 78

узора показаны на рис. 78. Волны, показанные пунктиром, идут от стенки AB к стенке CD; волны, показанные сплошными прямыми, идут в обратном направлении. По-видимому, по каналу прошёл катер. Попробуйте определить, в какую сторону он ушёл, и какова была его скорость. Будем считать, что волны в воде канала распространяются со скоростью 1 м/с (на самом деле скорость различна для разных длин волн и поэтому картина несколько сложнее показанной на рисунке).

Б

Решить эту задачу вам поможет ответ на задачу «Пловцы и волны». Из неё вы узнали, что от пловца или от катера, развивающего скорость больше скорости волн, расходятся клинообразно две чётко выраженные во́лны, угол α между которыми позволяет определить скорость катера:

$$v_к = \frac{v_в}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

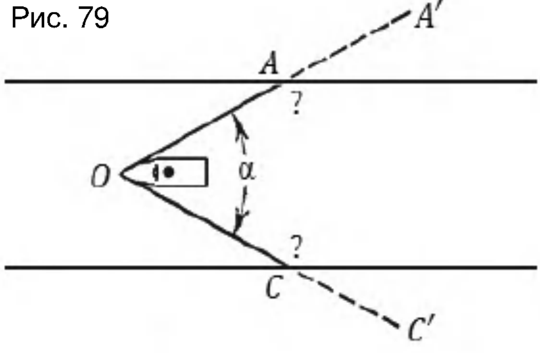


Рис. 79

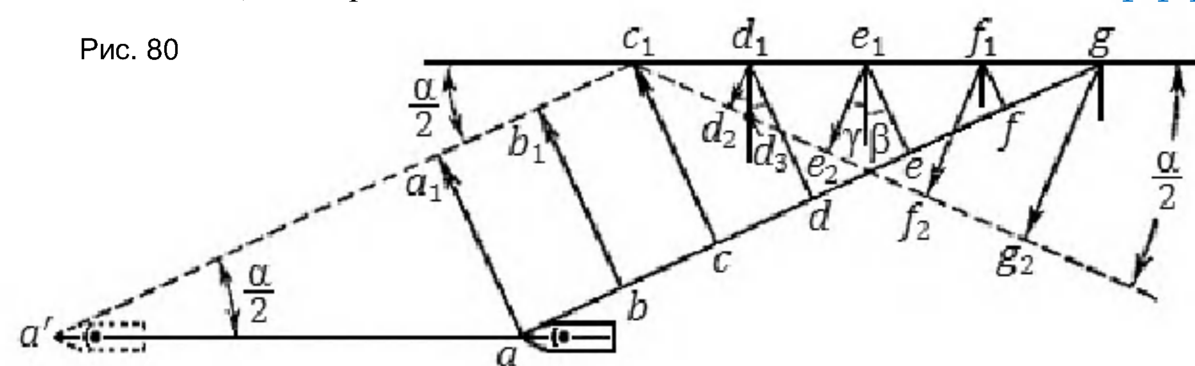
На рис. 79 показан катер и клин волн OA и OC. Если бы не было стенок, эти во́лны, очевидно, продолжались бы по пунктирным прямым AA' и CC'. Нарисуйте их продолжение при наличии стенок. Закон отражения вам хорошо известен.

[1] Задача опубликована в 3-м издании («Наука», 1976) – *Прим. составителя документа.*

В

Пусть в данный момент нос катера находится в точке a (рис. 80), а одна из создаваемых им волн находится на прямой $abcdefg$. Через некоторое время t нос катера будет в точке a', а сопровождающая его волна займёт положение $a'a_1b_1c_1$. Все

Рис. 80



точки волны движутся с одинаковой скоростью, направленной перпендикулярно к фронту волны. Поэтому за время t все они пройдут одинаковые расстояния aa_1, bb_1, cc_1. Точка d волны должна пройти такое же расстояние, но на своём пути в точке d_1 она встретит стенку и, отразившись от неё под углом отражения, равным углу падения ($\gamma = \beta$), пройдёт дополнительно путь d_1d_2. Общий путь точки d за время t будет ломаным, длина же его будет равна длине пути любой другой точки волны:

$$dd_1d_2 = cc_1 = bb_1 = aa_1\,.$$

Аналогично отразятся и остальные точки волны, так что

$$ee_1e_2 = ff_1f_2 = gg_2 = aa_1\,.$$

В результате точки отражённой волны выйдут на прямую $c_1d_2e_2f_2g_2$, наклонённую к стенке под таким же углом $\frac{\alpha}{2}$, под каким наклонена к ней падающая волна $a'a_1b_1c_1$.

Отражённая волна будет двигаться к противоположной стенке по направлению d_1d_2 (или e_1e_2, f_1f_2). Треугольники $c_1d_1d_2$ и $c_1d_1d_3$ подобны: d_3d_1 перпендикулярно к c_1d_1, а d_1d_2 перпендикулярно к c_1d_2, т.е. оба треугольника прямоугольны, второй же угол $\frac{\alpha}{2}$ является для них общим; поэтому равны и третьи углы. Следовательно, $\frac{\alpha}{2} = \gamma$.

Отражение от противоположной стенки будет происходить аналогично. В результате многократных отражений канал на большом протяжении будет заполнен двумя сериями косых волн, проходящих друг сквозь друга без каких-либо помех.

Нетрудно видеть, что точка c_1, в которой происходит излом волны $a'c_1g_2$ при отражении, перемещается влево вдоль стенки канала со скоростью, равной скорости катера. В самом деле, если бы скорость точки c_1 была меньше скорости носа катера a', то точка c_1 всё больше и больше отставала бы от катера, отчего прямая $a'c_1$ была бы всё более горизонтальной (на чертеже), т.е. угол $\frac{\alpha}{2}$ всё время уменьшался бы. Но ведь

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{v_в}{v_к}\,,$$

т.е. зависит только от скорости катера $v_к$ и скорости волн $v_в$, которые постоянны.

Следовательно, постоянен и угол $\frac{\alpha}{2}$, прямая $a'c_1$ будет перемещаться параллельно самой себе, что возможно, только если c_1 перемещается с такой же скоростью, как и a'.

Точно так же доказывается, что и остальные изломы волн у берегов (точки m_1, m_2, m_3, …, n_1, n_2, n_3, … на рис. 78) перемещаются со скоростью катера. Более того, точки p_1, p_2, p_3, …, в которых волны пересекаются на середине канала, тоже движутся в ту же сторону и с той же скоростью. Следовательно, если вы действительно стоите на берегу канала и наблюдаете живую картину волн, а не неподвижный рис. 78, то для определения скорости прошедшего по каналу катера вам даже не обязательно знать скорость волн: вам достаточно определить скорость передвижения любой из точек m_1, m_2, n_1, p_1 и т.д. Вся картина волн мчится за катером с его скоростью, хотя каждая из волн, перемещаясь в направлении, перпендикулярном к своему фронту, движется довольно лениво.

В какую же сторону ушёл катер на рис. 78? Волна n_1m_2, показанная сплошной прямой, идёт к стенке AB, m_2n_3 – к стенке CD. Точка их стыка m_2 перемещается влево. Следовательно, и все остальные точки, а также и катер, перемещаются влево.

Скорость катера можно определить, измерив угол α, под которым пересекаются волны. Измерение даёт $\alpha = 60°$. Следовательно,

$$v_к = \frac{v_в}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin 30°} = 2 \text{ м/с}.$$

61. Гром и молния

А

Молния – явление кратковременное, длится сотые доли секунды. Вызванный же ею гром может длиться много секунд. В этом нет ничего удивительного: звук от молнии приходит не только напрямик, но и более длинными путями – многократно отражаясь от облаков и земли. Естественно, что мы слышим вначале звук, пришедший по прямой линии, а затем долго ещё слышим раскаты грома, отдельные звуки которого приходят по всё более длинным ломаным путям. Но вот что странно: самая сильная часть звука не всегда приходится на начало громового раската. Довольно часто она приходит на секунду-две позже. В чём дело? Неужели отражённый звук может быть сильнее прямого?

Б

Вообще говоря, отражённый звук может быть и сильнее прямого. Пусть источник звука находится в точке A (рис. 81), а наблюдатель – в точке E. Может случиться так, что некоторый участок местности BCD, подобно вогнутому зеркалу, фокусирует в точку E звуковые лучи, исходящие из точки A. Это будет в том случае, если ломаные ABE, ACE, ADE в точности равны друг другу (или же отличаются друг от друга на целое число звуковых волн, что можно осуществить для чистого тона, но нель-

Рис. 81

зя для грома, состоящего из колебаний различной длины волны). Тогда звуки, пришедшие к наблюдателю E по этим ломаным, сложатся и создадут звук более сильный, чем первый из звуков, пришедший по прямой AE. Однако такой рельеф крайне маловероятен в естественных условиях, хотя его и можно сделать искусственно.

Главная причина в другом: молния, в отличие от других источников звука, обладает большой протяжённостью. Подумайте, как это может привести к описанному выше явлению.

В

Почти все звуки: паровозный гудок, крик человека, рёв мотора – излучаются из площадки крайне ограниченных размеров, диаметром в несколько сантиметров. Уже с расстояния в десяток метров такой источник можно считать точечным. Длина же молнии доходит до нескольких километров, и на всём своём протяжении молния является источником звука. Звук молнии – гром – результат мгновенного расширения воздуха, раскалившегося в канале молнии.


Рис. 82

Молния, как вы видели не раз, довольно неравномерна: в одних местах она ярче, в других слабее, на всём её протяжении много извилин и ответвлений (рис. 82). Поэтому и сила звуков от отдельных участков молнии различна. Ясно, что если участок A молнии (рис. 83) создаёт звук, намного более сильный, чем участок B, то наблюдатель C может услышать более сильный звук по прямой AC позже более слабого (BC).

Рис. 83

Вы можете, конечно, возразить, что расстояние AC много больше BC и звук от A сильнее ослабнет в пути и вряд ли будет громче звука от B. Правильно, и это надо учитывать. Но рассмотрим пример.

Пусть молния ударила на расстоянии $BC = 5$ км, а её длина $AB = 1$ км. И пусть звук от A хотя бы вдвое сильнее звука от B. Поскольку звуки ослабевают приблизительно обратно пропорционально квадрату расстояния, а расстояние BC составляет приблизительно $5/6$ расстояния AC, то звук от A будет воспринят наблюдателем как звук в

$$2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{50}{36} \approx 1{,}4$$

раз сильнее звука от B. Итак, в данном случае через три секунды после начала громового раската (1 км звук проходит приблизительно за 3 с) мы услышим звук более громкий, чем вначале.

Нетрудно показать, что чем ближе к нам молния, тем менее вероятно это явление. В самом деле, если $BC = 1$ км и $AB = 1$ км, то $AC \approx 2$ км, вдвое более сильный

звук от A был бы воспринят с силой $2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}5$, т.е. вдвое слабее, чем более слабый звук от B. Вот почему у близких молний гром начинается, как правило, с самого сильного звука, а затем постепенно ослабевает.

Правда, иногда близкая молния создаёт ещё шорохи и потрескивания, опережающие гром. Это стекают наведённые молнией заряды с окружающих наблюдателя предметов (проводов, деревьев и др.): По времени шорохи непосредственно примыкают к молнии, так как возмущение от молнии приходит к этим предметам электромагнитным путём со скоростью света, и только от предметов к наблюдателю – со скоростью звука. На гром они не похожи, но тоже достаточно впечатляющи.

62. Встречный поезд

А

Вы стои́те в поезде у открытого окна и слушаете мягкий стук колёс. Вдруг мимо вас проносится встречный, и вы, оглушённые дьявольским грохотом, отшатываетесь от окна. Когда вы придёте в себя, ответьте на вопрос: почему встречный поезд грохочет сильнее, чем тот, в котором вы едете?

Б

Прежде всего мы отметаем, как несерьёзный, ответ, что встречный давно не был в ремонте и поэтому громыхает всеми разболтанными суставами. Если бы железнодорожники выпускали на линию поезда-развалюхи, то иногда такой поезд оказался бы вашим и громыхал бы громче встречного. Но такого не бывает, – можете проверить на тысячах поездов, – всегда встречный грохочет сильнее.

Заслуживает внимания такое соображение: в момент встречи звук сильнее просто потому, что грохочут два состава, а не один, и шум удваивается. Конечно, два поезда громче одного, но просто удвоенный шум не привёл бы вас к такой встряске. Все органы чувств устроены так, что ощущение возрастает пропорционально не самому возбуждению, а его логарифму, т.е. существенно медленнее. Именно благодаря такой особенности органы чувств не перегружаются сигналами, даже в миллионы раз превышающими по интенсивности те, которые находятся на пороге слышимости, видимости и др. Ищите такое объяснение, при котором для наблюдателя у окна шум двух составов окажется в десятки раз больше шума собственного поезда (один плюс один больше десяти!). Вспомните, что было, когда ваш поезд проходил рядом со стеной или под мостом.

В

Первая и самая естественная причина – два источника звука находятся в неравноправном положении относительно наблюдателя. Основной грохот исходит из-под вагонов. Из-под встречного поезда звук попадает в ваше окно напрямик, из-под вашего – огибая вагон, существенно ослабевая при этом. Если бы звук распространялся только прямолинейно, то из окна к вам вообще не доносился бы стук колёс вашего поезда. Вы слышали бы только то, что пропускает пол. Но звуковые волны, как и любые другие, способны частично огибать препятствия (дифракция). Между прочим, чем короче волна, тем меньше она дифрагирует (при тех же размерах препятст-

вия). Поэтому для вас шум вашего вагона не только ослаблен, но, кроме того, состоит в основном из длинноволновых (басовых) звуков и почти не содержит высокочастотных скрипов и визгов, в результате он кажется более мягким и спокойным, чем шум встречного.

Вторая, менее очевидная, но не менее сильная причина большого грохота – отражение звуков вашего поезда от вагонов встречного. Ваш поезд при встрече с другим *сам* начинает сильнее грохотать, как бы салютуя встречному (грохот, конечно, остаётся тем же, но *для вас* он усиливается благодаря отражению). То, что отражение является серьёзным источником усиления звука, легко доказывается наблюдениями: грохот возрастает и без встречного поезда, если на его месте появится стена, совершенно безмолвная сама по себе. Малость расстояния между поездами позволяет звуку попасть к наблюдателю не только после однократного, но и после трёхкратного и т.д. отражений. При этом к вам доносятся не только басы, но и визгливые ноты вашего поезда.

Третья причина сильного впечатления от встречного поезда – чисто психологическая. Органы чувств слабо реагируют на интенсивность раздражения и гораздо сильнее на изменения этой интенсивности. К постоянному или постепенно нарастающему шуму слух привыкает и перестаёт его замечать. Внезапное же усиление шума обязательно будет отмечено (закон Вебера – Фехнера).

И не только усиление: когда мимо вас пройдёт последний вагон, вы получите встряску от внезапно наступившей тишины.

К второстепенным психологическим факторам можно отнести взаимодействие органов чувств: мелькание света, завихрения воздуха, пыль – всё это воздействует на зрение, осязание, обоняние и суммируется в мозгу с главным впечатлением от грохота поезда, усиливая общее потрясение. Сюда же относится тот факт, что ритм встречного поезда вторгается в ритм нашего и, разрушая его (из-за несовпадения), наносит оскорбление нашим музыкальным чувствам.

63. Домашний радиолокатор

А

«Стоит четырёхэтажный дом, в каждом этаже по восьми окон, на крыше два слуховых окна и две трубы, в каждом этаже по два квартиранта. А теперь скажите, господа, в каком году умерла у швейцара его бабушка?»

Эта задача была предложена бравым солдатом Швейком медицинской комиссии, проверявшей его психическое состояние по системе Каллерсона и Вейкинга.

Задача интересная, но построена на несколько устаревшем материале. Сейчас и этажей в домах больше, и квартирантов, а на крышах, кроме труб, есть ещё и телевизионные антенны. Задачу можно модернизировать, например, следующим образом.

Дом, в котором вы живёте, находится южнее телецентра. На экране вашего телевизора почему-то каждый артист и каждый предмет раздвоён: рядом с подлинником, правее его на одну пятую часть горизонтального размера кадра, видно его «привидение» – более бледный двойник. А теперь скажите, каково расстояние до высотного здания, стоящего южнее вашего дома?

Б

Понять моего каламбура
Из них ни единый не мог,
И долго стояли в раздумье
Студьозусы Вагнер и Кох.

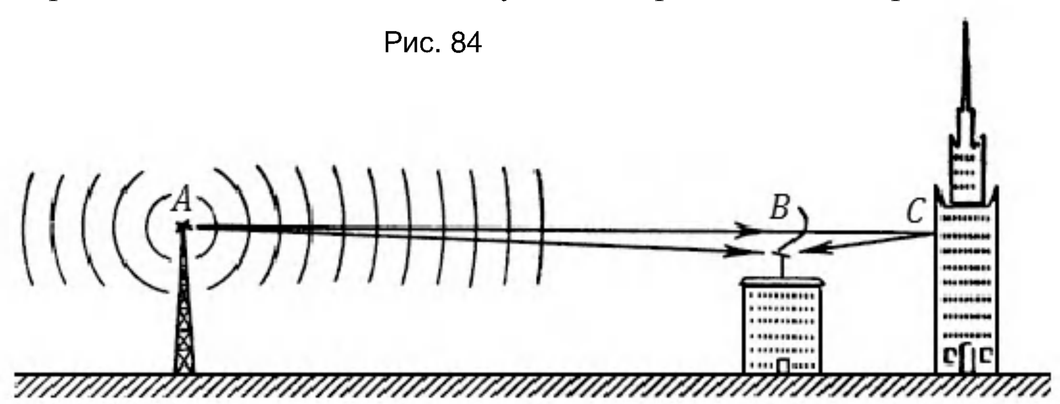
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Доблестные студиозусы»

Сходство между двумя задачами чисто внешнее – в парадоксальности вопроса, его неожиданности, «нелепости». Различие же – принципиальное. Первая задача не имеет решения, для ответа на вопрос нужных исходных данных нет, а имеющиеся – не нужны. Вторая задача содержит почти все необходимые исходные данные. Недостающие же общеизвестны: советский стандарт телевидения – 25 кадров в секунду и 625 строк в кадре. Подсказка – в заголовке задачи.

В

Телевизионный сигнал в приёмник поступает по прямой AB (рис. 84) – от передающей антенны телецентра A к приёмной B – и создает на экране правильное, подлинное изображение. Но он может поступить в приёмник и вторым, «незаконным»

Рис. 84



путём: по ломаной ACB, отразившись от высотного здания C. Длина ломаной ACB больше длины прямой AB приблизительно на двойное расстояние CB, которое является искомым и которое мы обозначим буквой R:

$$ACB - AB \approx 2CB = 2R.$$

Запаздывающий отражённый сигнал и создаст на экране изображение-двойник. Поскольку луч на экране зарисовывает строку слева направо, то запаздывающее отражённое изображение будет нарисовано правее истинного.

Сигнал, прошедший по ломаной, запоздает в приёмник по сравнению с прямым на время t, которое равно добавочному пути $2R$, делённому на скорость радиоволн $c = 300\ 000$ км/с:

$$t = \frac{2R}{c}.$$

Эта формула является одной из основных формул радиолокации. Измеряя запаздывание t отражённого сигнала, в радиолокации определяют расстояние до отражателя

$$R = \frac{ct}{2}.$$

Можем ли мы измерить запаздывание t? Да, можем: по величине смещения повторного изображения относительно подлинного. В условиях задачи сказано, что

это смещение составляет одну пятую горизонтального размера кадра, т.е. одну пятую длины строки. В секунду передается $25 \cdot 625 = 15\,625$ строк. Следовательно, одна строка зарисовывается за время

$$t_\text{с} = \frac{1}{15\,625}\,\text{сек} = 64\,\text{мкс},$$

а одна пятая строки – за 12,8 мкс. Это и есть время запаздывания отражённого сигнала. Расстояние до высотного здания

$$R = \frac{ct}{2} = \frac{300\,000}{2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 15\,625} \approx 1{,}92\,\text{км}.$$

Таким образом, задача решена. Для полноты следует упомянуть только о некоторых упрощениях, которые были допущены выше. Они привели к заметной неточности. Главная неточность проистекает из того, что на самом деле время $t_\text{с}$ отводится не только для зарисовки строки, но и на обратный ход, т.е. на возврат луча в крайнее левое положение – в точку, из которой луч начнёт зарисовывать следующую строку. Это время составляет около 15% от $t_\text{с}$. Следовательно, наблюдаемое смещение составляет одну пятую не от всего $t_\text{с}$, а от $0{,}85t_\text{с}$. С учётом этой существенной поправки расстояние до высотного здания оказывается равным 1,64 км.

Другой причиной неточности может быть непостоянство скорости электронного луча вдоль строки как результат того, что ток в строчной отклоняющей катушке меняется не совсем по линейному закону. Строгий учёт этой погрешности возможен только с помощью специальных измерений формы отклоняющего тока. Обычно в телевизорах эта погрешность составляет 1÷5%.

Есть и другие источники погрешности (например, непостоянство скорости распространения радиоволн при изменении метеорологических условий в атмосфере), но их роль намного меньше, чем роль той ошибки, с которой мы измерили смещение по экрану.

Перепишем формулу в ином виде:

$$c = \frac{2R}{t}.$$

Не наводит ли она вас на мысль, что вы можете в домашних условиях измерять скорость радиоволн? Если наводит, то вы правы: тот опыт, который в прошлом веке могли осуществить только выдающиеся экспериментаторы, в XX веке доступен простому владельцу телевизора. Достаточно измерить расстояние R рулеткой или известными вам триангуляционными методами, определить запаздывание повторного изображения на экране, разделить одно на другое – и вы получаете ту фантастически огромную и даже немного неправдоподобную величину, которую называют скоростью света. Причём с большей точностью, чем это было сделано впервые астрономом Рёмером (1666 г.), который для этого использовал затмения спутников Юпитера. Но не будем задирать нос. Рёмер был первым. Первому труднее всех. Ведь в его время большинство учёных считали, что свет распространяется мгновенно. И полученный им результат, несмотря на ошибку в 25%, был выдающимся достижением науки.

Вернёмся к нашей задаче. В ней есть ещё много любопытного. Например, можно ли измерить описанным методом расстояние до высотного дома, находящегося не на продолжении прямой телецентр–приёмник, а в стороне от неё?

Рис. 85

На рис. 85 показаны в плане антенны (передающая A и приёмная B) и отражатели (высотные здания, мачты линий электропередачи и др.). Если отражатель C'' стоит в стороне от прямой AB, то отражённый сигнал приходит к приёмнику по ломаной $AC''B$, длина которой $R_1 + R_2$ больше длины прямой R_0 на величину

$$\Delta R = R_1 + R_2 - R_0 ,$$

и запаздывание на экране

$$t = \frac{\Delta R}{c} = \frac{R_1 + R_2 - R_0}{c} .$$

Таким образом, в нашем распоряжении одно уравнение с тремя неизвестными R_1, R_2 и R_0, следовательно, для их определения данных пока недостаточно.

Полезно рассмотреть, как должны быть расположены на местности все отражатели, дающие равное запаздывание на экране. Входящая в формулу величина R_0 постоянна (телецентр и ваш дом взаимно неподвижны). Следовательно, одно и то же запаздывание t дают все отражатели, для которых $R_1 + R_2 = \mathrm{const}$. Геометрическое место точек, обладающих этим свойством (т.е. для которых сумма расстояний R_1 и R_2 до двух точек – A и B – постоянна), называют эллипсом; точки A и B называют фокусами эллипса (сравните с определением окружности).

Если расстояние R_0 известно (в радиолокации расстояние между передатчиком и приёмником в большинстве случаев известно, расстояние от вашего дома до телецентра можно определить по карте), то для определения оставшихся двух неизвестных R_1 и R_2 необходимо ещё одно независимое измерение. Обычно для этого измеряют угол α (рис. 85). Все отражатели C, C', C'', C''' находятся на одном эллипсе и, следовательно, имеют одинаковую сумму $R_1 + R_2$, но разные углы α, α', α'', α'''. Измерив, например, α'' и построив прямую BC'', мы можем определить местоположение объекта C'' как точку пересечения прямой BC'' и эллипса, соответствующего данной сумме $R_1 + R_2$.

Интересно, что владелец телевизора может измерить угол α тоже чисто радиотехническим методом, не прибегая к буссолям и теодолитам и невзирая, например, на густой туман.

Простейшая телевизионная антенна – полуволновый диполь – обладает неодинаковой чувствительностью к сигналам, приходящим с различных направлений

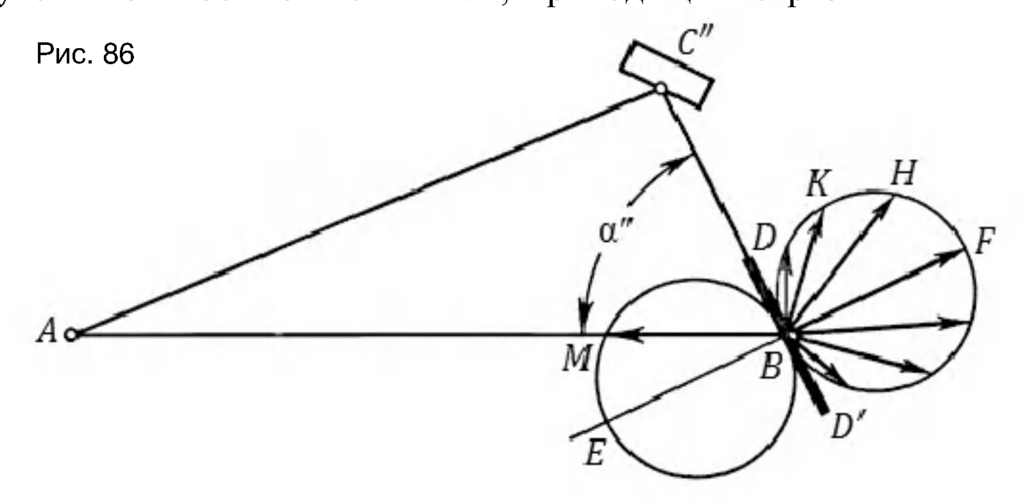


Рис. 86

(рис. 86). Наибольшая чувствительность – к направлениям BF и BE, перпендикулярным к самому́ диполю DD'. В других направлениях (BH, BK) чувствительность (лучше – коэффициент направленности) антенны меньше, а в направлениях BD и BD' она теоретически равна нулю. (Точно так же зависело бы от направления облучения количество световых лучей, перехватываемых боковой поверхностью стержня DD'.) Количественно коэффициент направленности характеризуется длиной векторов BK, BH, BF; огибающая этих векторов KHF называется диаграммой направленности.

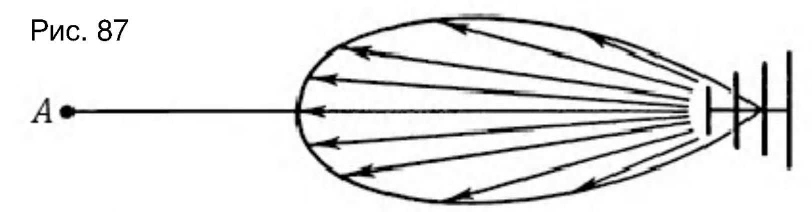
Будем поворачивать наш диполь до тех пор, пока двойник на экране не исчезнет. Это будет означать, что на отражатель C'' мы направили минимум диаграммы направленности, т.е. продольную ось диполя DD'. Она и укажет направление на отражатель C''.

Полученный результат – пропадание помехи – весьма полезен. Этим способом мы можем избавиться от мешающего отражённого сигнала. В то же время прямой сигнал телецентра сохраняется; правда, он несколько уменьшен: длина вектора BM меньше максимально возможной.

Этим способом можно отстроиться, к сожалению, не от всякого мешающего отражателя. Например, направляя минимум диаграммы на отражатель C (рис. 85), мы этим самым направили бы второй, диаметрально противоположный, минимум на телецентр, отчего приём прекратился бы. Правда, если бы был ещё один отражатель в стороне от прямой AC, то мы могли бы его использовать как источник полезного сигнала, но обычно он слаб для того, чтобы из него извлекать пользу, хотя и достаточно силён, чтобы приносить вред.

И уж совершенно невозможно этим методом отстроиться от всех отражателей, если направления на них различны. В этом случае необходимо применить более сложную антенну, например, так называемый «волновой канал» (рис. 87), обладающий довольно острой диаграммой направленности. Ориентировав его на телецентр, мы получаем усиление в несколько раз полезного сигнала и ослабление во много раз сигналов мешающих, приходящих с других направлений. На рис. 87 диаграмма направленности изображена несколько упрощённо – показан только главный её лепесток и не показаны более слабые боковые.

Рис. 87



Понаблюдайте на досуге за любопытным поведением помехи на экране, если источником её является движущийся отражатель – пролетающий над вашим домом самолёт. В этом случае «привидение» начинает пульсировать по яркости, причём даже меняет полярность, становясь то светлее фона, то темнее его (то позитив, то негатив). Такая пульсация – результат того, что суммарное расстояние $R_1 + R_2$ в случае движущегося отражателя непрерывно меняется, и поэтому высокочастотное колебание, отражённое от самолёта, оказывается то в одинаковой фазе с прямым сигналом телецентра, то в противоположной (интерференция). Если бы вы замерили частоту пульсации «привидения», то могли бы даже определить скорость самолёта.

В самом деле, полный период пульсации равен времени, за которое сумма $R_1 + R_2$ укоротится (или удлинится) на одну длину волны λ. Если эллипсы (в про-

странстве – эллипсоиды) построить так, чтобы для двух соседних сумма $R_1 + R_2$ различалась ровно на λ (рис. 85), то частота пульсации ложного изображения на экране будет равна числу эллипсоидов, пересекаемых самолётом в секунду, т.е. будет зависеть (хотя и довольно сложным образом) от скорости. Это всё тот же эффект Доплера (см. задачу «Волны и поплавки»).

Наше исследование было бы неполным, если бы мы не упомянули, что иногда повторные контуры (менее чёткие) на телевизионном экране возникают как следствие внутренних дефектов телевизора (расстройки контуров, их перекоррекции и др.). Но мы не будем превращать нашу задачу в справочник по ремонту телевизоров.

64. Ломаная короче прямой

А

– А знаете, в ваших объяснениях к предыдущей задаче что-то неладно, – заявил мне один из владельцев телевизора. – У меня на экране есть «привидение», но оно несколько левее (!) истинного изображения. Выходит, что отражённый сигнал приходит раньше прямого. Но ведь не может ломаная быть короче прямой!

Да, здесь что-то подозрительно. Может быть, объяснит читатель?

Б

– Возможно, в телевизоре перепутаны концы катушки строчной развертки. Тогда луч будет зарисовывать строку справа налево и запаздывающий сигнал будет зарисован левее.

– Нет, не перепутаны. Мы обнаружили бы это немедленно: все надписи пришлось бы читать справа налево. А они изображаются нормально.

Подсказка – в следующем ниже эпиграфе.

В

Ничего не доводи до крайности: человек, желающий трапезовать слишком поздно, рискует трапезовать на другой день поутру.

КОЗЬМА ПРУТКОВ

«Мысли и афоризмы», № 36

«Привидение», желающее быть правее всех, рискует оказаться в начале следующей строки, т.е. всех левее. На одну строку (вместе с обратным ходом) отводится время $t_с = 64$ мкс (см. предыдущую задачу). Поэтому если бы показанное на рис. 84 высотное здание находилось южнее вашей антенны на

$$R = \frac{ct_с}{2} = \frac{300\,000 \cdot 64 \cdot 10^{-6}}{2} = 9{,}6 \text{ км},$$

то отражённый от него сигнал запаздывал бы ровно на одну строку, и «привидение» накладывалось бы на подлинную фигуру без сдвига вправо или влево (но со сдвигом вниз на одну строку, который на практике мало заметен). Ясно, что если бы расстояние до отражателя было немного меньше 9,6 км, то отражённый сигнал был бы зарисован левее.

Итак, аксиому геометрии пошатнуть не удалось: ломаная всё-таки длиннее прямой, даже в телевидении.

Если бы расстояние до отражателя было больше 9,6 км, то «привидение» сдвинулось бы больше чем на строку и… наш метод измерения расстояний дал бы осечку.

Если бы расстояние было равно, например, 11 км, то наблюдаемое на экране смещение вправо соответствовало бы расстоянию $11 - 9{,}6 = 1{,}4$ км, что является грубейшей ложью. Радиолокации приходится считаться с возможностью таких ошибок (или, как говорят, неоднозначностей).

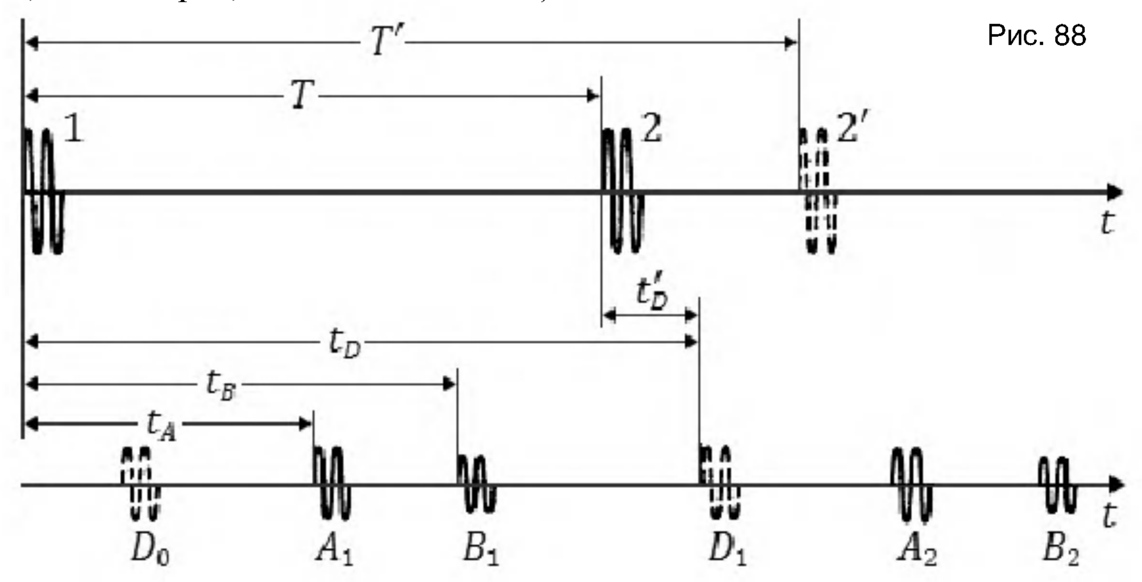


Рис. 88

Если передатчик радиолокатора пошлёт в некоторый момент импульс 1 (рис. 88), то следующий импульс 2 можно послать только после того, как вернутся все отражённые, например импульс A_1 от объекта A и импульс B_1 от объекта B. При этом расстояния до объектов A и B будут правильно определены по запаздываниям t_A и t_B отражённых сигналов относительно посылаемого (зондирующего). Спустя T секунд посылается второй зондирующий импульс 2, и весь процесс повторяется (см. отражённые A_2 и B_2).

Однако если бы был ещё более далёкий отражатель D, от которого сигнал запаздывал бы на время $t_D > T$, то это запаздывание определить было бы невозможно: никак нельзя было бы сказать, какая из двух величин – t_D или t'_D – является верной. Иными словами, нельзя было бы сказать, следствием какого из посылаемых импульсов (1 или 2) является отражённый D_1 (равно как и D_0, происходящий, возможно, от ещё более раннего зондирующего). Для устранения неопределённости пришлось бы увеличить период повторения зондирующих импульсов до величины $T' > t_D$.

Поскольку с увеличением расстояния величина отражённого сигнала очень быстро уменьшается (обратно пропорционально четвёртой степени расстояния), то при правильно выбранном T появление заметного сигнала с запаздыванием $t_D > T$ маловероятно.

Возможно и второе объяснение. Откуда у вас уверенность, что опережающее «привидение» – «привидение», а не истинное изображение? Только потому, что оно слабее? Но если есть ещё один высотный дом, стоящий между телецентром и вашим домом, то он может экранировать прямой сигнал настолько, что тот станет слабее отражённого. Правда, такая сильная экранировка возможна только при условии, что экранирующий высотный дом совсем рядом с вашим.

65. Следствие, опережающее причину

Если бы всё прошедшее было настоящим, а настоящее продолжало существовать наряду с будущим, кто был бы в силах разобрать: где причины и где последствия?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 146

А

При трансляции по радио после громкого отрывистого звука иногда слышны его повторения, постепенно ослабевающие. Это вполне объяснимо: видимо, в студии имеется эхо, которое тоже поступает в микрофон. А не приходилось ли вам слышать по радио в тишине, окружающей громкий звук, эхо не только запаздывающее, но и опережающее? Не приходилось, говорите? Приходилось, только вы не обращали на это внимания. Ну, что ж, в будущем вы можете за ним понаблюдать. А пока попробуйте объяснить его происхождение. Вам поможет следующее наблюдение: каждое «эхо» отстоит от своих соседей на строго равные интервалы, порядка секунды, причём ослабевают они почти симметрично в обе стороны относительно породившего их громкого звука.

Б

То, что было в предыдущей задаче, не имеет отношения к данной: транслируемый звук, в отличие от изображения, не разбивается ни на кадры, ни на стро́ки. Разгадку следует искать в том, что опережающее эхо появляется при трансляции магнитной записи (или долгоиграющей пластинки) и не появляется при непосредственном выступлении артиста перед студийным микрофоном.

В

Магнитная лента, как известно, используется в виде рулонов. Запись на неё производится вполне доброкачественно, без эха. Дефекты появляются потом. При хранении ленты соседние витки её соприкасаются. Сильно намагниченное место, соответствующее громкому звуку, может слегка намагнитить прикасающиеся к нему участки соседних витков, как последующего, так и предыдущего. И тогда в радиопередаче мы услышим два «эха», симметричных во времени относительно их первоисточника. Если звук достаточно сильный, а намотка ленты плотная, то могут намагнититься не только ближайшие, но и последующие витки (в оба конца). Правда, они будут намагничены слабее, и услышать их можно только в глубокой тишине.

На современной граммофонной пластинке (33 оборота в минуту) опережающее «эхо» образуется ещё в процессе записи (на оригинале, с которого потом делается «негатив» – металлическая матрица, а уже с последней штампуются многочисленные копии). Число витков на один миллиметр велико (10), поэтому барьер, отделяющий одну бороздку от другой, тонок и при записи громкого звука некоторый (очень малый) процент деформации передаётся сквозь барьер на предыдущий виток.

Любопытно, что на последующий виток деформация почти не передаётся, так как в момент записи данного витка на месте последующего находится ещё «целина»

(борозда ещё не нарезана), а сплошная масса сопротивляется деформации лучше, чем тонкий одиночный барьер. У старых пластинок (78 об/мин) на миллиметр приходится только четыре витка, поэтому барьеры между витками толще, почти не деформируются, и опережающего «эха» нет.

Предупреждение: чтобы услышать опережающее «эхо», нужна повышенная бдительность с вашей стороны, так как оно начинается без предупреждения. В этом смысле запаздывающее эхо находится в более выгодном положении: оно идёт после громкого звука, который насторожит ваше внимание. Впрочем, если исполняемое произведение вам хорошо знакомо, то вы можете предвидеть моменты, когда следует ожидать опережающее «эхо», и нацелить своё внимание.

66. Часами измеряется время…

А

«Часами измеряется время, а временем жизнь человеческая; но чем, скажи, измеришь ты глубину Восточного океана?» Эту глубокую мысль или, лучше сказать, бездонную пропасть мысли Козьмы Пруткова (мысль № 62) можно рассматривать как эпиграф к задаче. А можно считать и самой задачей. Можете ли вы её решить?

Б

Во времена Пруткова малые глуби́ны (до 4 метров) измеряли футштоком (шест, размеченный в футах), а большие (до 500 метров) – лотом, т.е. гирей, укреплённой на длинном тросе – лотлине.

Но тогда ещё не было такого лота, который мог бы достать дно «Восточного» (т.е. Великого или Тихого) океана. Это, по-видимому, и заставило мыслителя остановиться в глубоком раздумье. Раздумье оказалось плодотворным: в его высказывании содержится явный намёк на сделанное в следующем веке изобретение, в основе которого лежит использование часов для измерения глубины океана. Что это за изобретение?

В

Это изобретение – эхолот. С поверхности океана в глубину посылается звуковой импульс и принимается эхо, отражённое от дна океана. Часы включаются в момент отправления импульса и выключаются в момент возвращения эха. Глубина определяется по запаздыванию эха:

$$h = \frac{vt}{2},$$

где v – скорость звука в морской воде, t – время запаздывания, а двойка в знаменателе учитывает двойной путь (туда и обратно), пройденный сигналом. Это принцип гидролокации[1]. Скорость звука в морской воде составляет в среднем 1530 м/с. Если измеренное время t равно, например, 10 с, то

$$h = \frac{1530 \cdot 10}{2} = 7650 \text{ м}.$$

[1] Следовало бы её называть звуколокацией, иначе радио- и светолокацию пришлось бы называть аэролокацией, что было бы неточным.

Очевидно, что точность измерений зависит от того, насколько точно известна скорость звуковых волн и с какой точностью измеряется запаздывание сигнала. Обычный секундомер позволяет измерять время с точностью до десятых долей секунды (т.е. глубину с точностью до сотни метров). Для большей точности используются электронные секундомеры (осциллографы и др.).

67. А теперь – воздушный океан

А

Высоко в голубом воздушном океане пролетает самолёт. Нельзя ли измерить его высоту с помощью часов? Чтобы вы не думали, что эта задача – повторение предыдущей, ограничим вас в технических средствах. У вас нет ни эхолота, ни звуколокатора, ни радиолокатора, ни светолокатора, – а только часы.

Б

Часов для этого недостаточно: нужны ещё глаза и уши, а также и сообразительность. Вы уже сообразили: световой сигнал надо использовать для запуска секундомера, а звуковой – для остановки. Так измеряют расстояние до молнии: по запаздыванию грома относительно вспышки света. И если бы на самолёте был произведён орудийный выстрел, то его вспышку и звук можно было бы легко использовать для измерений. Но у вас нет в распоряжении этого выстрела. Самолёт просто летит и гудит. Как можно использовать непрерывные световой и звуковой сигналы для выбора моментов включения и выключения секундомера?

В

Допустим сначала, что самолёт пролетает через зенит. Включим секундомер (или заметим показания секундной стрелки) в момент, когда мы видим самолёт в зените. Звук самолёта в этот момент доносится совсем из другой точки. Но спустя некоторое время направление на звук совместится с зенитом. Выключим секундомер в этот момент. Время t, отсчитанное между моментами, когда к нам из зенита пришли световой и звуковой сигналы, равно времени, в течение которого звук преодолел расстояние h, равное высоте полёта. Следовательно, $h = vt$, где v – скорость звука в воздухе.

Строго говоря, из времени t следовало бы вычесть время, в течение которого до нас добирался световой сигнал, но это время составляет лишь около одной миллионной от t. Значительно бóльшую погрешность в измерения внесёт незнание точной скорости звука, которая заметно зависит от температуры и химического состава воздуха, а и то, и другое меняется по высоте и трудно поддается учёту. Полагая приближённо, что $v = 330$ м/с (это верно при средней температуре на трассе звука 0°С), при $t = 15$ с имеем $h = 4950$ м ≈ 5 км. Конечно, точность измерений сильно зависит от того, как точно вы фиксируете моменты прохождения самолёта и кажущегося источника звука через зенит. Если первое сделать можно сравнительно точно (до долей градуса, если подвесить на нити маленький грузик и лечь на траву так, чтобы наш глаз был на продолжении нити), то второе – намного труднее: слуховой аппарат человека при определении направления может допускать ошибки в несколько граду-

сов. Электроакустические пеленгаторы способны делать это намного точнее. Правда, и пеленгатору получить высокую точность могут помешать многие причины: ветер, преломление звука на неоднородностях атмосферы и др.

Ну, а если самолёт пролетает в стороне от зенита? Тогда этим методом будет измерена не высота, а наклонное расстояние до той точки траектории, для которой производятся наблюдения. Для пересчёта в высоту потребуется домножить измеренное расстояние на косинус угла между направлениями в зенит и в точку наблюдения, для чего предварительно нужно измерить этот угол.

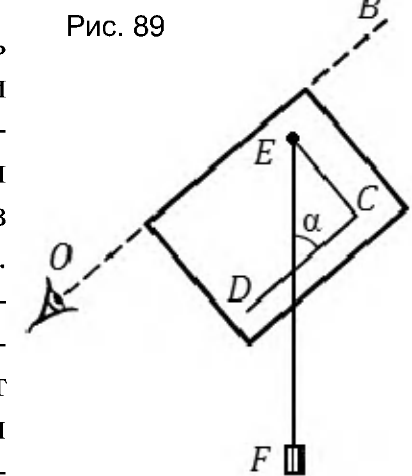


Рис. 89

Простейшим угломерным устройством может служить отвес EF, укреплённый на листке картона (рис. 89). Если прямая DC параллельна прямой OB, то угол α между прямыми DC и EF равен углу между направлением в зенит и линией визирования OB (O – глаз наблюдателя). Один из вас должен непрерывно наводить линию OB на самолёт. Второй в намеченный момент включает секундомер и одновременно подает команду «стоп», по которой первый останавливает слежение линии OB за самолётом. В момент совмещения источника звука с выбранным направлением теперь уже первый подает второму команду «стоп», по которой секундомер останавливается. Затем надо прижать картон к нити EF, после чего с листа картона считывается угол α.

Можно определить и скорость самолёта. Интересно, что если для определения высоты используется одно направление и два разных момента (зенит и моменты прихода света и звука), то для определения скорости, наоборот, надо использовать один момент и два разных направления. Угол между направлениями на свет и звук выражается через отношение скоростей звука и самолёта. (Полагаясь на вашу сообразительность, в подробности не вдаёмся. Только не думайте, что это просто.)

68. Телецентр на скорую руку

А

В физическом кабинете вашей школы имеются два простеньких осциллографа. Чего вам не хватает, чтобы сделать телевизионную передачу, т.е. передавать изображения и принимать их?

Б

Большинство считают, что нужна передающая камера, синхрогенератор кадровых и строчных импульсов, передатчик и приёмник и т.д. Одним словом, нужны ещё телецентр и телевизор. На самом деле 90% всей аппаратуры у вас уже есть.

По крайней мере, из самой постановки задачи следует, что один из двух осциллографов должен быть передающей камерой, а второй – телевизором. Но развёртки у обоих осциллографов – только по одной строке. А как построить кадр? Ведь для него нужны по крайней мере строчная и кадровая развёртки в камере, строчная и кадровая в телевизоре и синхрогенератор для их согласования. В вашем распоряжении – две развёртки: одна в одном осциллографе, вторая – в другом.

В

Вам нужен кадр? Включите оба осциллографа, настройте развёртку одного, например, на 20 пилообразных импульсов в секунду, а второго – на тысячу. У одного осциллографа – одна развёртка, не делающая кадра. У двух осциллографов – две развёртки. Подайте напряжение с клемм «X» (горизонтальная развёртка) одного осциллографа на клеммы «Y» (вертикальная развёртка) другого. На экране этого осциллографа вы увидите 20 кадров в секунду и в каждом по 50 строк. Подайте аналогично напряжение «X» второго осциллографа на «Y» первого. Вы увидите и на нём тот же кадр, только повернутый на 90° относительно первого. Если этот поворот неудобен для вас, его можно было бы устранить, положив один из осциллографов набок, но лучше этого не делать, так как осциллограф не рассчитан на состояние лежебоки. Через 5 минут вы к нему привыкнете и так.

Итак, у вас почти все готово: передающий и приёмный растры, строчные и кадровые развёртки и «синхрогенератор», обеспечивающий синхронность и единство работы обоих растров. Телевизор готов, но ему нечего принимать: передающая камера ещё не работает.

Для начала нас удовлетворит простейшее изображение. Для решения задачи в принципе достаточно увидеть на экране одного осциллографа то, что передаётся другим. Вырежем из тёмного картона несколько силуэтов: квадрат, прямоугольник, звезду. Наложим один из них на экран «передающего» осциллографа (безразлично какого). Что ещё осталось сделать?

Нужен, очевидно, преобразователь передаваемого светового сигнала в принимаемый электрический, т.е. фотодиод, фототранзистор и т.п. Поставьте его в 20 см перед экраном, на который наложена звезда. Что будет на его выходе?

Пока луч на экране бежит вне звезды, фотодиод видит свет и преобразует в пропорциональный ему ток. Когда луч прячется за контур звезды, свет на входе фотодиода и ток на выходе исчезают (предполагается, что других источников света в кабинете нет). Когда луч выглянет из-за контура звезды, ток появится вновь. Если мы выход фотодиода должным образом подключим к управляющему электроду трубки осциллографа-«телевизора» (или ко входу «Z», который предусмотрен во многих осциллографах), то импульс, соответствующий наличию света, будет отпирать луч, и тот будет рисовать соответствующий участок соответствующей строки. Луч передающей «камеры» спрятался за звездой – и ток исчез, луч «телевизора» погас (но продолжает «втёмную» двигаться по строке), а когда передающий луч выйдет из-за звезды, приёмный вновь засветится, И так на каждой строке, без сбоев: ведь оба кадра управляются одними и теми же генераторами развёртки и поэтому разойтись во времени не могут.

Телевизионная система в принципе готова. Но только в принципе. На практике ток фотодиода слишком слаб, и между фотодиодом и «телевизором» придётся поставить усилитель (с полосой пропускания не менее 50 кГц: ведь в строке у вас около 50 элементов, а строк в секунду – 1000). Обычный вещательный усилитель можно использовать лишь при 15 кадрах в секунду и 15 строках в кадре, но изображение при этом будет мерцающим и слаборазборчивым.

Лучшим решением было бы использовать вместо фотодиода фотоумножитель. Но тогда возникает проблема высоковольтного источника питания.

Главное свойство рассмотренной телевизионной системы – простота, что является большим педагогическим достоинством. Понять такую простенькую систему не испугается даже троечник. Он наглядно убеждается, что не боги горшки обжигают.

Второе достоинство – гибкость системы. У осциллографов много ручек регулировки, и все они могут быть использованы при постановке опытов. Например, ручки вертикального и горизонтального смещений на «передающем» осциллографе позволяют смещать по экрану растр относительно звезды: на «принимающем» осциллографе при этом мы увидим смещение звезды относительно растра. Можно выключить быструю «строчную» развёртку. Тогда на обоих экранах останется одна строка, создаваемая «кадровой» развёрткой. Замедлив её до одного импульса в секунду и поставив оба осциллографа рядом, мы можем визуально наблюдать принцип образования свечения луча «телевизора» синхронно с заходом и выходом луча «телекамеры» из-за звезды.

Можно подать сигнал от фотодиода не на управляющий электрод, а на катод трубки. На экране вместо позитива появляется негатив изображения. То же самое можно получить с помощью перемены полярности сигнала внутри усилителя. И так далее.

69. Многосигнальная локация [1]

А

Если по одному концу длинной стальной трубы стукнуть молотком, то на другом конце можно услышать этот звук. Можно ли по звуку определить длину трубы?

Б

Вспоминая радиолокацию, т.е. наиболее распространённый метод измерения расстояний по времени прохождения сигналов, мы обнаруживаем следующие закономерности:

1. По отражённому сигналу (рис. 90*а*) измерение дальности осуществляется просто: сигнал передатчика излучается в момент t_0 и, пройдя путь $2R$ (туда и обратно),

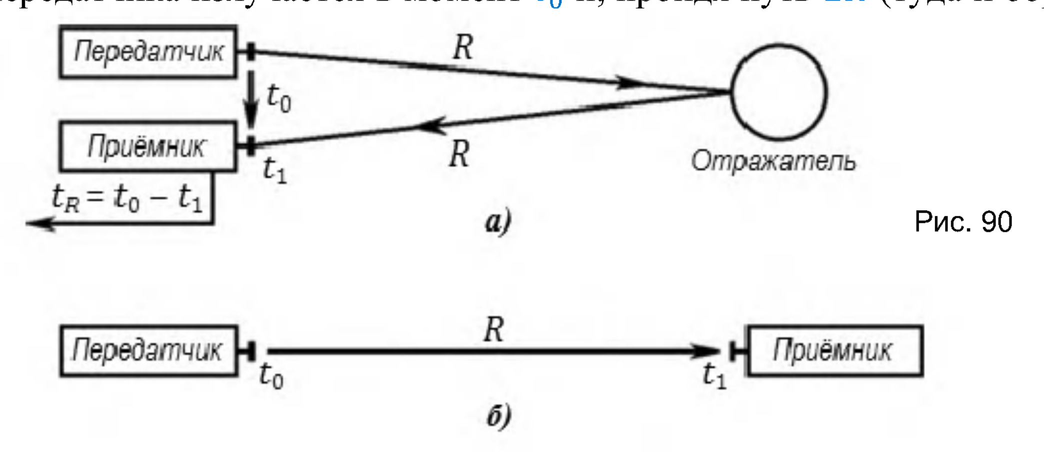


Рис. 90

возвращается в приёмник в момент t_1. Сравнивая моменты t_1 и t_0, мы находим:

$$t_R = t_1 - t_0 = \frac{2R}{v}, \qquad (1)$$

[1] Задача опубликована в 3-м издании («Наука», 1976) – *Прим. составителя документа.*

где v – скорость распространения сигнала. Отсюда находим:

$$R = \frac{vt_R}{2}.$$

Главной особенностью является наличие в приёмнике информации как о моменте старта t_0 (поступает непосредственно из передатчика в приёмник), так и о моменте финиша t_1 (поступает в виде отражённого сигнала). Разумеется, учитывают и задержку сигнала t_0 в цепях передатчика-приёмника, либо делают общую антенну, тогда эту задержку можно сделать равной нулю.

2. По прямому сигналу (рис. 90*б*) измерение R невозможно: в приёмнике известен только момент приёма t_1 и неизвестен момент передачи t_0. По прямому сигналу локация определяет обычно только направление на источник сигнала.

В нашей задаче с трубой передатчик (молоток) находится на одном конце измеряемого расстояния, приёмник (ухо) – на другом. Следовательно, работа ведётся по прямому сигналу, измерение длины трубы невозможно.

Однако измеряем же мы расстояние до молнии! Или до стреляющей пушки. На это возражают, что в таких измерениях используется свет и звук. Если бы мы видели взмах молотка в момент t_0 и приняли бы по трубе звук в момент t_1, то получили бы:

$$t_R = t_1 - t_0 = \frac{R}{v}, \qquad \textbf{(2)}$$

где v – скорость звука.

Эти возражения справедливы: по условиям задачи надо обойтись только звуком. Но одно неверно: формула (**2**). Если её получить более корректно и затем проанализировать, вы догадаетесь и о том, как с помощью только звука определить длину трубы.

В

В формуле (**2**) фигурируют два момента времени: t_1 и t_0. При более внимательном анализе обнаруживается, что определяющих задачу о пушке (молнии) моментов времени *не два, а три*:

а) момент выстрела t_0 (свет и звук);

б) момент прихода света к наблюдателю t_1;

в) момент прихода звука t_2.

Очевидны соотношения

$$t_1 - t_0 = \frac{R}{v_1}, \qquad \textbf{(3)}$$

$$t_2 - t_0 = \frac{R}{v_2}. \qquad \textbf{(4)}$$

где v_1 и v_2 – скорости распространения сигналов.

Момент t_0 нам неизвестен (зафиксировать его наблюдатель мог бы по сигналу, распространяющемуся мгновенно, но таких сигналов не бывает). Однако t_0 можно найти: ведь (**3**) и (**4**) есть система двух уравнений с двумя неизвестными R и t_0. Поскольку нас интересует только R, то t_0 просто можно исключить из рассмотрения. Вычитая, например, (**3**) из (**4**), имеем:

$$t_R = t_2 - t_1 = \frac{R}{v_2} - \frac{R}{v_1} = R\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2}. \qquad \textbf{(5)}$$

Итак, мы вывели точную формулу (**5**) взамен неточной (**2**). Правда, в случае молнии обе эти формулы практически совпадают, так как скорость света существенно больше скорости звука в воздухе:

$$v_1 = 300\,000 \text{ км/с} \gg 0{,}33 \text{ км/с} = v_2 \,,$$

и поэтому слагаемым R/v_1 в (**5**) можно пренебречь. Однако тогда формула (**5**) теряет свою эвристическую силу. В точном же виде (**5**) легко подсказывает нам, как решить задачу. Если мы обязаны ограничиться только звуком, то, согласно формуле (**5**), надо изыскать два звука, распространяющихся вдоль трубы с различными скоростями.

Теперь сообразить уже легко: помимо звука, идущего по стальной трубе, необходимо принять звук, идущий по воздуху. Звук, идущий по наружному воздуху, ослабевает обратно пропорционально квадрату расстояния и поэтому для больших расстояний непригоден. Звук, идущий по воздуху, заполняющему трубу, почти не рассеивается в стороны и ослабевает только благодаря поглощению. Скорость продольных волн в стали $v_1 = 5050$ м/с; скорость звука в воздухе при температуре 0°С $v_2 = 330$ м/с (а вообще она пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры).

Поэтому, если $t_R = t_2 - t_1 = 2$ с, то:

$$R = t_R \frac{v_1 v_2}{v_1 - v_2} = 2\,\frac{5050 \cdot 330}{5050 - 330} \approx 705 \text{ м} \,. \qquad \textbf{(6)}$$

Итак, приняв два импульса звука и заметив моменты их прихода t_1 и t_2, мы измерим по формуле (**5**) длину трубы. Это локация по прямому сигналу. Как видим, по прямому сигналу тоже можно определить не только направление, но и дальность. Правда, при условии, что имеются два сигнала с различными скоростями распространения. Такую локацию будем называть двухсигнальной.

Заметим, что помимо двух ударов в моменты t_2 и t_1, мы ещё будем всё время, начиная с момента t_1, слышать в трубе смутный гул. Это следствие многих причин, две из которых мы назовём. Первая – распространение звука не только по прямой, но и по ломаным, например, по воздуху внутри трубы с многократными отражениями от стенок. Ломаная длиннее прямой, поэтому этот гул будет слышен после момента t_2. При падении звука из воздуха на стенку трубы отражается только часть звука, а остальное преломляется внутрь стали и после этого движется к нашему уху по стали с большей скоростью. Эта часть гула принимается между моментами t_1 и t_2. Вторая причина гула – отражение звука от конца трубы (это в основном касается волн, бегущих в стали). Добежав до конца трубы, звук отражается и бежит по стали назад, отражается от другого конца и т.д. Этот вид звука в нашем примере будет появляться на наблюдаемом конце трубы после момента t_1 с периодом:

$$T = \frac{2R}{v_1} = \frac{2 \cdot 705}{5050} = 0{,}28 \text{ с} \,, \qquad \textbf{(7)}$$

быстро ослабевая и маскируясь другими шумами (например, отражениями от неоднородностей, вызванных несовершенством сварных швов). Формула (**7**) является формулой локации для отражённого сигнала. По измеренному T она позволила бы длину трубы определить на том конце, на котором по ней ударяют молотком.

Ещё пример двухсигнальной локации. По поверхности воды произведён удар, в другой точке водоёма приняты два звуковых сигнала с интервалом $t_R = 1$ с. Один из

сигналов пришёл по воде ($v_1 = 1500$ м/с), второй – по воздуху. Согласно формуле **(6)** $R = 430$ м.

Вернёмся к трубе. Помимо продольных волн, в стали возникают и поперечные, скорость которых $v_3 = 3300$ м/с. А если горизонтальную трубу наполовину заполнить водой, то возникает ещё и четвёртый сигнал, распространяющийся со скоростью $v_4 = 1500$ м/с. Система становится четырёхсигнальной.

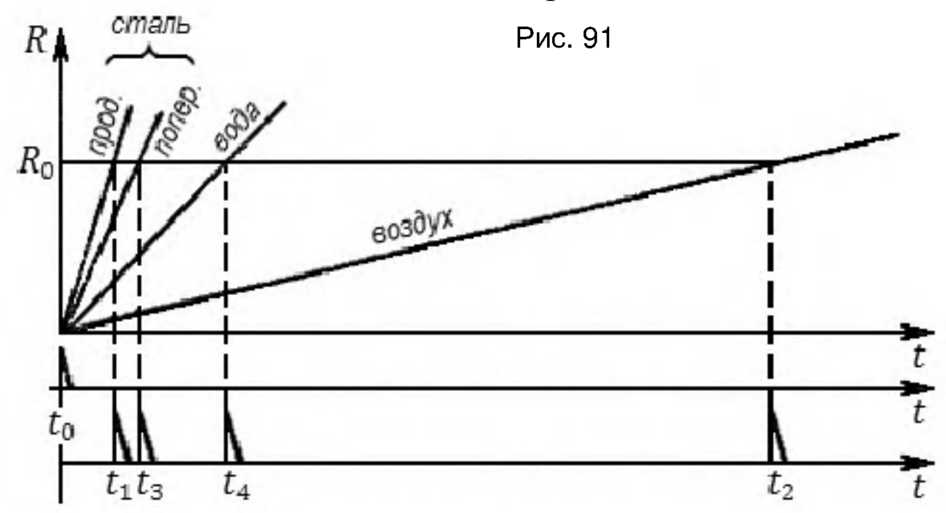


Рис. 91

На рис. 91 показаны графики движения четырёх сигналов вдоль трубы длиной R_0, удар сделан в момент t_0, на другом конце трубы сигналы приняты в моменты t_1, t_2, t_3 и t_4.

Даёт ли это что-нибудь для измерения длины трубы? Ведь для отыскания двух неизвестных R и t_0 достаточно системы из двух уравнений.

В принципе это так, и если бы входящие в них v_1, v_2 и t_R были абсолютно точны, то и дополнительные уравнения были бы лишними. В реальных условиях, поскольку всякая величина известна с ошибкой, то всякая избыточность информации полезна, так как позволяет уменьшить результирующую ошибку. По четырём каналам можно осуществить три независимых измерения R, после чего для уточнения взять хотя бы среднее арифметическое. При неравных точностях отдельных измерений слагаемые в «среднее арифметическое» подставляются не на равных правах, а с «весом» тем большим, чем точнее соответствующее измерение. Подробности – в теории статистических решений.

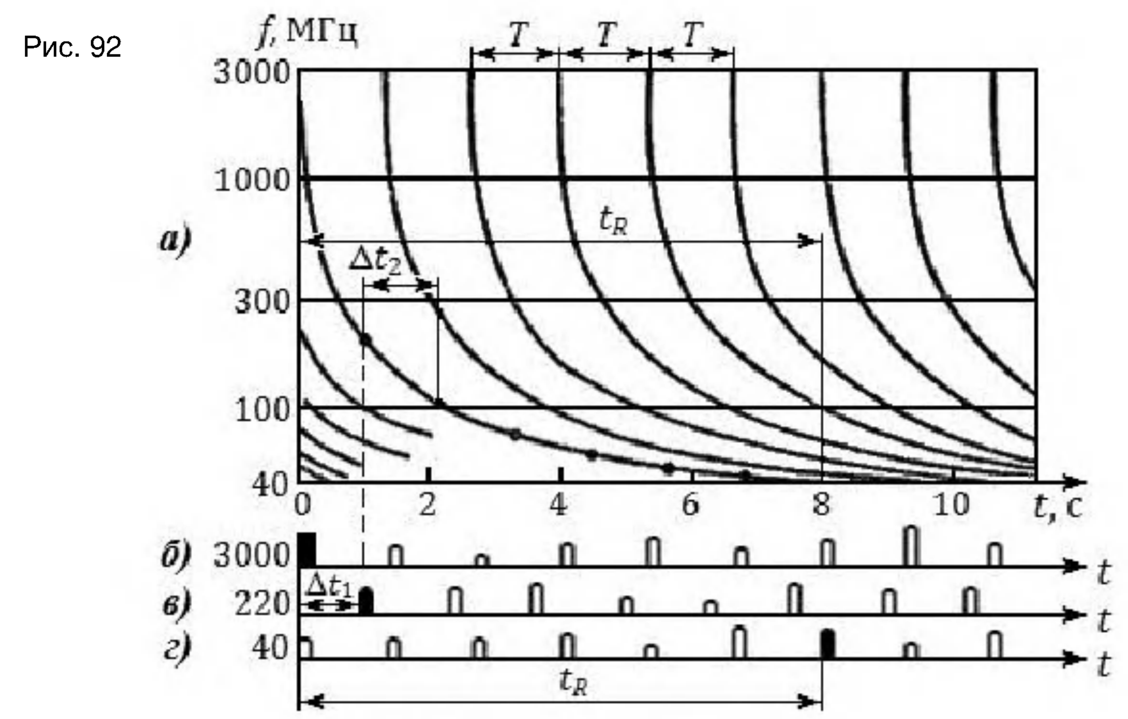
Точность отдельных измерений действительно неодинакова. Так, например, скорость звука в воздухе сильнее зависит от температуры и, кроме того, меняется вместе с ветром. К металлу ветер не имеет отношения. Кроме того, можно показать, что если два сигнала сильно разнятся по скорости ($v_1 \gg v_4$, как например, на рис. 91), то относительная погрешность измерений определяется только относительной погрешностью меньшей из скоростей. Если же две скорости (v_1 и v_3 на рис. 91) мало отличаются друг от друга, требуется высокая точность знания обеих скоростей, что объясняется наличием их разности в знаменателе формулы **(6)**.

Например, расстояние до молнии в принципе можно было бы вычислить не по сигналам свет–звук, а по сигналам свет–радио, так как молния сопровождается и радиоизлучением, причём скорость радиоволн в ионизированном воздухе грозы меньше скорости света. Однако это различие невелико и, кроме того, из-за изменчивости условий трудно предсказуемо. Поэтому точность определения расстояния была бы меньше, чем по сигналам свет–звук или радио–звук.

В ионизированной среде можно для измерений использовать и сигналы радио-радио (две различные волны), так как скорость оказывается зависящей от длины волны (для более длинных волн v меньше). Это явление используется в радиоастрономии для измерения расстояний до пульсаров[1].

Пульсар – нейтронная звезда, быстро вращающаяся. Его радиоизлучение достигает Земли в виде коротких импульсов, периодически повторяющихся в такт вращению. Первый из открытых пульсаров СР1919 имеет период следования импульсов

Рис. 92



$T = 1{,}337$ с. Эти импульсы принимаются на разных волнах. Наличие в межзвёздной среде ионизированных частиц приводит к тому, что время пребывания в пути для некоторого импульса на волне 7,5 м (частота ≈ 40 МГц) на $t_R = 8$ с больше (рис. 92), чем для того же импульса на волне 10 см ($f = 3000$ МГц). Это видно из того, что кривая, выходящая из левого верхнего угла (координаты: 3000 МГц и 0 с), пересекает ось абсцисс в точке $t = 8$ с. По известной концентрации электронов в межзвёздной среде (в среднем 1 электрон в 30 см^3) и по этому запаздыванию определено расстояние до пульсара:

$$R \approx 410 \text{ св. лет} \approx 13 \cdot 10^9 \text{ св. с} \approx 3{,}9 \cdot 10^{15} \text{ км} .$$

Весьма поучительно, что полный путь от пульсара импульс проходит за $13 \cdot 10^9$ с, а 8 с составляет менее одной миллиардной от полного пути. Столь малый эффект позволил, однако, сравнительно точно определить огромное расстояние, не определяемое пока никаким другим способом. Дальнейшие уточнения концентрации электронов позволят уточнить и оценку дальности.

В заключение рассмотрим одно затруднение, на которое вы, возможно, уже обратили внимание: как можно определить, что на двух волнах различие в запаздывании $t_R = 8$ с, когда импульсы следуют с периодом $T = 1{,}337$ с? Ведь в задаче «Ломаная короче прямой» показано, что однозначно измеряются лишь запаздывания, не превосходящие периода следования импульсов $t_R < T$. Действительно, это было бы невозможно, если бы пульсар не излучал и на промежуточных волнах. На рис. 92*а*

[1] См., например, *В.Л.Гинзбург*. Пульсары. «Знание», 1970.

кривые показывают зависимость запаздывания каждого из импульсов от несущей частоты. На рис. 92*б* показаны импульсы, принимаемые на частоте 3000 МГц, на рис. 92*г* – на частоте 40 МГц. Зачернён один и тот же импульс. Сдвиг между зачернёнными $t_R = 8$ с, таков же сдвиг и в любой другой паре импульсов.

Отождествить зачернённые импульсы между собой (проще говоря, правильно их зачернить) можно, если использовать кривую в качестве путеводной нити, ведущей с частоты 3000 МГц на частоту 40 МГц. Для этого достаточно снять эту кривую, т.е. принимать импульсы не только на 3000 и 40 МГц, но и на всех промежуточных частотах (многосигнальная локация). Впрочем, не обязательно снимать всю кривую, достаточно снять её на частотах, показанных жирными точками. Эти точки будут запаздывать друг относительно друга на $\Delta t < T$, и поэтому по двум соседним точкам запаздывание Δt измеряется однозначно. Так, например, на частоте 220 МГц (рис. 92*в*) зачернённый импульс отстоит от соответствующего импульса на рис. 92*б* на $\Delta t_1 > T$. Просуммировав все Δt, измеренные однозначно, мы получаем и однозначно измеренное t_R:

$$t_R = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_N \, .$$

Поскольку в $t_R = 8$ с укладывается $T = 1{,}337$ с примерно $n = 6$ раз, то для однозначных измерений t_R необходимое число разных частот должно быть $\mathrm{N} \geqslant n + 1 = 7$, т.е. в этом случае локация должна быть, как минимум, семисигнальной. Правда, если бы теория могла гарантировать более точное предсказание формы кривой, то можно было бы обойтись и меньшим числом каналов. Положение, однако, обратное: кривую желательно снять экспериментально, располагая точки как можно гуще, чтобы такая экспериментальная кривая давала пищу теоретикам при решении других проблем.

70. Два будильника

А

На столе стоят два однотипных будильника. Но один из них идёт точно, второй же отстаёт. Требуется быстро определить, насколько он отстанет за сутки. Как это сделать?

Б

Можно, конечно, поступить по-разному. Например, поставить на отстающем будильнике в точности такое же время, как и на точном, и затем снять разность показаний через 24 часа. Но этот способ отнимает много времени и не так уж точен. В будильниках нет секундной стрелки, и мы не можем установить один будильник по второму с точностью до секунды. Ошибка начальной установки по минутной шкале может достигать четверти минуты. Такую же ошибку вы допустите при снятии показаний в конце срока. В результате ошибка измерений может достигать полминуты. А если расхождение будильников за сутки составляет 2 минуты, то относительная погрешность измерения расхождения составит 25% – весьма большую величину.

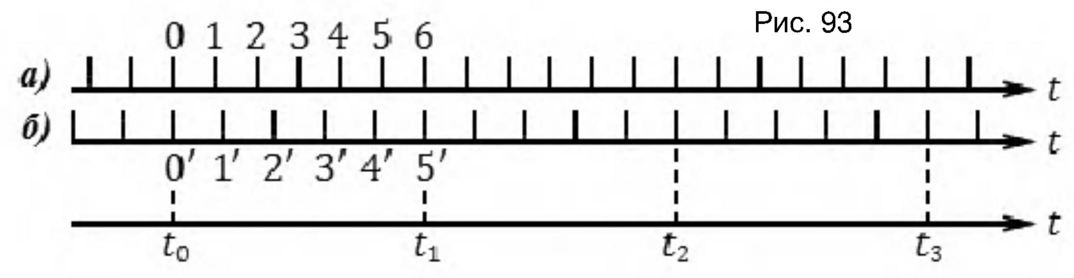
Если бы на будильниках были секундные стрелки, то можно было бы получить более высокую точность. Но секундные стрелки движутся быстро. При сравнении положений двух секундных стрелок за время, в течение которого вы переводите взгляд

с одной стрелки на другую, их положение изменится. Это осложняет задачу и не позволяет получить ту точность, которой можно было бы достигнуть теоретически.

А нельзя ли определить расхождение будильников по их тиканью? Ведь вам не нужно «переводить слух» с одного будильника на другой! Кроме того, даже если секундных стрелок и нет, то, поскольку часы тикают много раз в минуту, тиканье может до некоторой степени заменить секундную стрелку. Подумайте, как использовать звуки двух будильников для измерений. Можно ли провести измерения вообще не глядя на часы (ночью или с закрытыми глазами)? Нужно ли для этого знать период тиканья, т.е. промежуток времени от одного звука до следующего? Как долго будет длиться ваш эксперимент?

В

Если часы однотипны[1], но идут неодинаково, то периоды тиканья у них будут разными. Поэтому удары часов будут то совпадать, то расходиться, а затем через некоторое время снова совпадать. Начнём эксперимент в момент, когда удары совпадают (часы идут «в ногу»). Будем считать число ударов правильного будильника от одного совпадения до следующего. Чтобы не спутать, каким часам принадлежат подсчитываемые нами удары, расположим будильники так, чтобы мы различали, что звуки идут к нам явно с разных направлений. Допустим, что с момента одного совпадения до следующего мы насчитали 72 удара точных часов. Это значит, что отстающие часы успели за это время опоздать ровно на один удар, т.е. сделали 71 удар, и 71-й удар их совпал с 72-м ударом точных. Следовательно, часы отстают на $^1/_{72}$ часть, что в сутки составит 20 минут.



Поясним сказанное рисунком. На рис. 93 верхняя шкала вертикальных чёрточек показывает моменты ударов точных часов, шкала под нею – моменты ударов отстающих часов. В момент t_0 удары обоих часов совпали. В дальнейшем удары отстающих часов начинают всё более отставать от ударов правильных (сравните удары 1 и 1′; 2 и 2′; 3 и 3′), пока не отстанут на целый период. На рисунке это произошло на шестом ударе: пятый удар отстающих часов совпал с шестым ударом правильных (такой будильник за 6 часов отстанет на 1 час, за сутки – на 4 часа). В дальнейшем поведение часов периодически повторяется (сравните моменты t_1, t_2, t_3 и т.д.).

Чем меньше разница в ходе часов, тем больше число ударов от одного совпадения до другого. Например, если часы за сутки отстают только на 1 минуту, то между совпадениями произойдёт $24 \cdot 60 = 1440$ ударов.

Показанный на рисунке пример является слишком частным, он соответствует случаю, когда соотношение периодов будильников является отношением целых чисел. Возможно, однако, такое положение, когда 54-й удар вторых часов ещё опере-

[1] У неоднотипных часов даже при точном ходе могут быть различия либо в частоте ударов, либо в тембре звука, что помешает эксперименту.

жает 55-й удар первых, а 55-й удар вторых часов уже отстаёт от 56-го удара первых, т.е. точное совпадение произошло между 55-м и 56-м ударами верных часов и не могло быть отмечено. Если отношение является отношением рациональных чисел, то совпадение когда-нибудь всё-таки окажется вполне точным. Например, если совпадение должно было произойти точно посредине между 55-м и 56-м ударами точных часов (т.е. посредине между 54-м и 55-м ударами отстающих) и, таким образом, отношение равно $55{,}5 : 54{,}5$, то следующее точное совпадение произойдёт на 111-м ударе точных часов ($55{,}5 \cdot 2 = 111$) и 109-м ударе неточных (расхождение в 2 удара!). В этом случае, очевидно, расхождение составляет не $\frac{1}{111}$ часть, а $\frac{2}{111} = \frac{1}{55{,}5}$.

Если в момент t_0 было точное совпадение ударов, но отношение периодов есть иррациональное число, то второго точного совпадения теоретически уже не будет более никогда. Однако на практике одни часы от других отстают обычно на очень малый процент, поэтому отставание накапливается медленно, и, следовательно, всегда в серии ударов можно найти такой, в котором звуки обоих будильников совпадают с высокой точностью. Человеческое ухо (особенно музыкальное, тренированное) является хорошим анализатором ритма и очень точно отмечает совпадение. При соотношении ритмов $100 : 99$ момент совпадения можно отметить с точностью до одного удара (т.е. в худшем случае найти, что совпадение произошло не на сотом, а на сто первом ударе, и этим самым допустить ошибку измерения в 1%). Кроме того, ошибку можно уменьшить путём повторения опыта и вычислением среднего арифметического из нескольких измерений. Можно также продолжить счёт от начального совпадения до некоторого n-го (например, пятого t_5) и затем разделить результат счёта[1] на n.

Затраты времени на эксперимент при этом незначительны: если удары будильника следуют через каждые полсекунды, то сто ударов могут быть сосчитаны за 50 с. Знать при этом абсолютную продолжительность периодов тиканья будильников совершенно не обязательно: ведь результатом измерений являются не сами величины периодов, а только их отношение, которое и позволяет немедленно определить относительную погрешность часов.

Заметим, что неравномерность хода часов в течение суток несколько портит описанную выше идеальную картину и мешает достигнуть предельной точности.

Описанный здесь метод быстрого измерения малых расхождений двух ритмов можно назвать нониусом времени, потому что в его основу заложен тот же принцип, на котором строится известный в измерениях длин метод нониуса.

Полезно сравнить задачу о двух будильниках с радиотехнической задачей сравнения частот двух синусоидальных колебаний. На рис. 94*а* и *б* показаны два синусоидальных колебания с частотами f_1 и f_2 (причём $f_1 > f_2$) или, что то же самое, с периодами

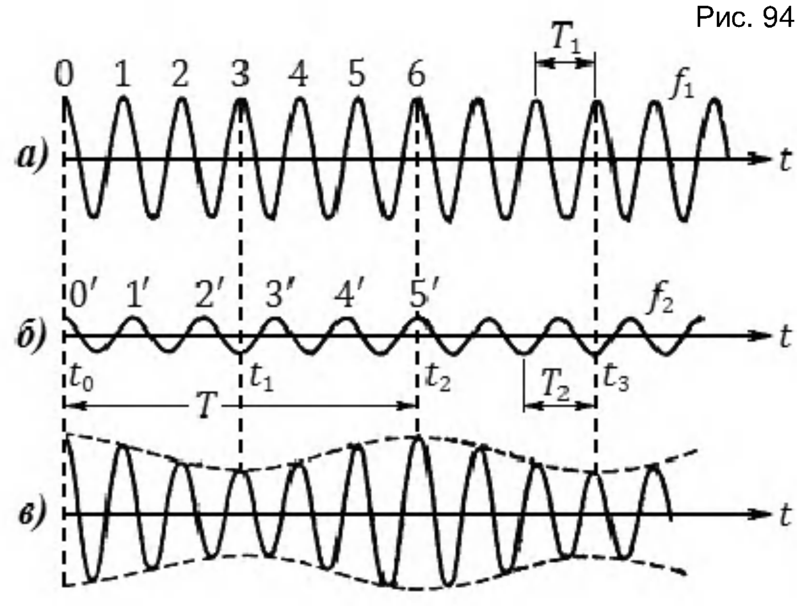
$$T_1 = \frac{1}{f_1} < \frac{1}{f_2} = T_2 .$$

На 6 периодов T_1 приходится 5 периодов T_2 (ср. с рис. 93). Если эти колебания сложить, то результирующее колебание (рис. 94*в*) окажется модулированным по ампли-

---

[1] Когда в задаче «Лицом к лицу с точностью» вы будете решать проблему нестабильности лазера, вспомните об этой возможности.

туде. Максимумы огибающей будут в моменты, когда обе синусоиды совпадают по фазе (момент t_0 – совпадение 0 и $0'$; момент t_2 – совпадение шестой волны первой синусоиды с пятой волной второй и т.д.). Минимумы соответствуют моментам t_1, t_3, ..., когда обе синусоиды оказываются в противоположных фазах. Период модулирующего колебания



$$T = 6T_1 = 5T_2$$

равен времени, в течение которого два исходных колебания разойдутся на одну волну ($6 - 5 = 1$). За секунду они разойдутся на $f_1 - f_2$ волн. Таким будет число колебаний огибающей в секунду, т.е. частота огибающей f:

$$f = f_1 - f_2\,.$$

Таким образом, частота пульсации результирующего колебания оказывается равной разности частот исходных колебаний. Её называют разностной частотой или частотой биений. С помощью детектора или другого устройства можно выделить эту частоту и отсеять исходные. Операция выделения разностной частоты широко используется в радиотехнике. В супергетеродинном приёмнике при смешении частот приходящего сигнала и местного гетеродина выделяется разностная, промежуточная частота. В радиолокации при смешении посылаемого сигнала с отражённым от движущегося объекта выделяется разностная – доплеровская частота, пропорциональная радиальной скорости объекта (см. задачу «Письма с дороги»).

71. Просим к роялю!

А

Перед вами хорошо настроенное пианино. Вам разрешается трогать клавиши, но, естественно, запрещается перестраивать струны, передвигать по ним порожки и вообще забираться внутрь инструмента.

Можно ли заставить струну «до» первой, октавы звучать, как «соль» второй?

Б

Прежде всего условимся в обозначениях: все ноты первой октавы будем писать с приставкой 1 (**до-1**, **ре-1**, **фа-диез-1** и т.д.), второй – с приставкой 2 (**си-2**) и т.д.

Если читатель не музыкант, то он убеждённо заявляет, что поскольку высота тона струны определяется её длиной, толщиной и натяжением, то, не перестраивая струну, нельзя заставить **до-1** звучать иначе, чем **до-1**. Таковы законы физики, и тут ничего не поделаешь. Разве только вынести пианино на трескучий мороз, тогда струна при остывании укоротится, сильнее натянется и тон её повысится.

Чтобы ваше мнение о возможностях струны изменилось в благоприятную сторону, решите две задачи полегче.

1. Частота, соответствующая **до-1**, равна 261,63 Гц. Чему равны частóты второй, третьей, четвёртой гармоник этой струны? Можете ли вы назвать ноты, соответствующие этим гармоникам? Если не можете, то даём подсказку: увеличение частоты вдвое повышает любую ноту на октаву. Поскольку в октаве 12 полутонов, то повышение на полтона (при равномерно темперированной шкале) увеличивает частоту в $\sqrt[12]{2}$ раз, на тон – в $\sqrt[12]{2^2}$, на полтора тона – в $\sqrt[12]{2^3}$ и т.д. Впрочем, чтобы уж совсем избавить вас от вычислений, приводим таблицу абсолютных частот всех нот первой и второй октав (в графе f/f_1 – относительные частóты, т.е. числа, показывающие, во сколько раз частота f выше частоты $f_1 = 261{,}63$ Гц).

Нота	Октава 1		Октава 2	
	f	f/f_1	f	f/f_1
До	261,6	1	523,2	2
До-диез	277,2	1,06	554,4	2,12
Ре	293,7	1,12	587,3	2,24
Ре-диез	311,1	1,19	622,3	2,38
Ми	329,6	1,26	659,3	2,52
Фа	349,2	1,33	698,5	2,67
Фа-диез	370,0	1,41	740,0	2,83
Соль	392,0	1,50	784,0	3,00
Соль-диез	415,3	1,59	830,6	3,17
Ля	440	1,68	880	3,36
Ля-диез	466,2	1,78	932,3	3,56
Си	493,9	1,89	987,8	3,78

Частота ноты **ля-1** написана без знаков за запятой, потому что условились считать её в точности равной 440 Гц, а остальные ноты получать из неё путём вычислений.

2. Освободите **до-1**, т.е. осторожно, без звука, нажмите на соответствующую клавишу. При этом демпфирующий (заглушающий) молоточек поднимается. Ударьте по **до-2** и через секунду-другую отпустите её клавишу. Почему **до-2** продолжает звучать? Отпустите **до-1**. Почему перестала звучать **до-2**?

В

Рассмотрим сначала вспомогательные задачи.

1. Если бы струна колебалась так, как показано на рис. 95*а*, то она излучала бы чистый тон, т.е. колебание единственной частоты. Чистый тон сух и не очень приятен. Поэтому для музыки большая удача, что струна одновременно совершает несколько видов колебаний. Она одновременно колеблется всей длиной (рис. 95*а*, первая гармоника), двумя половинками (рис. 95*б*, вторая гармоника), тремя третями (рис. 95*в*, третья гармоника), четырьмя четвертями (рис. 95*г*) и т.д. Частота колебаний обратно пропорциональна длине соответствующей волны. Если рис. 95*а, б, в* и *г* изображают струну **до-1**, то эти гармоники имеют частóты $f_1 = 261{,}6$ Гц, $2f_1 = 523{,}2$ Гц, $3f_1 = 784{,}9$ Гц и $4f_1 = 1046{,}5$ Гц соответственно. Это **до-1**, **до-2**, почти точно **соль-2** (точное значение 784,0 Гц) и **до-3**. С увеличением номера гармоники её интенсивность A, как правило, уменьшается (рис. рис. 96*а*).

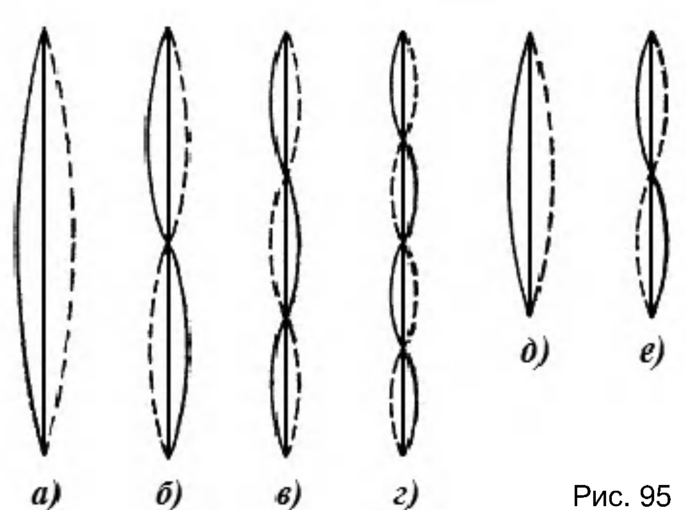
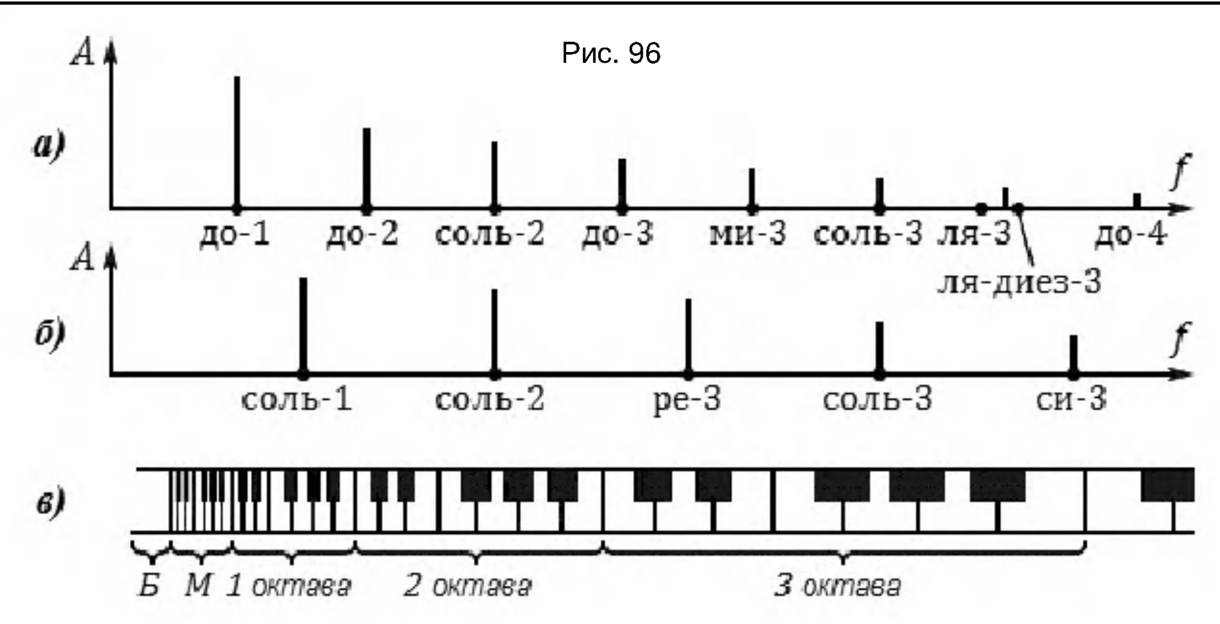


Рис. 95

Рис. 96



2. Ударив по **до-2**, мы возбудили колебания на частоте $f_2 = 2f_1 = 523{,}2$ Гц и её гармониках $f_3 = 2f_2 = 4f_1 = 1046{,}5$ Гц и др. Струна **до-1** освобождена от демпфера и могла бы начать колебаться, если бы её кто-нибудь возбудил. Этим возбудителем и будет звучащее **до-2**. Правда, вся струна **до-1** настроена на октаву ниже, т.е. не находится в резонансе с **до-2**, но зато её половинки (рис. 96*б*) могут поддержать колебания на частоте **до-2**. Иными словами, струна **до-2** возбудит в струне **до-1** вторую гармонику, *не возбуждая первой* (!). Вторая гармоника **до-2** возбудит в **до-1** её четвёртую гармонику ($2f_2 = 4f_1$), и т.д. Струна **до-1** будет излучать только чётные свои гармоники. Отпустив клавишу **до-2**, мы заглушаем струну **до-2** и прекращаем её колебания. Но часть энергии её первой гармоники передана второй гармонике струны **до-1**. Поэтому мы продолжаем слышать **до-2**: эта нота исходит от струны **до-1**. В том, что это именно так, легко убедиться: отпустим клавишу **до-1**, и нота **до-2** прекратится!

Итак, можно заставить струну звучать не на той ноте, на которой она официально обязана звучать. Теперь вы наверняка сумеете сами решить первоначальную задачу. Для этого следует перестать читать и подумать. Вот это решение.

Чтобы заставить **до-1** звучать, как **соль-2**, нужно возбудить её третью гармонику (не возбуждая первой и второй, иначе эти сильные гармоники заглушат слабую третью). Для этого нужно освободить **до-1** и ударить **соль-2** (которая, как мы выяснили ранее, и является третьей гармоникой **до-1**). Отпустив **соль-2**, мы услышим ноту **соль-2** теперь уже от струны **до-1**.

Весьма любопытно, что извлечь ноту **соль-2** из струны **до-1** можно и без участия струны **соль-2**. Вместо неё можно использовать струну **соль-1**. Как же при этом произойдёт возбуждение струны **до-1**? *Вторая* гармоника струны **соль-1** возбудит *третью* гармонику струны **до-1**:

$$2f_{(\text{соль-1})} = 2 \cdot 392 = 784 \approx 3 \cdot 261{,}6 = 3f_{(\text{до-1})}\ .$$

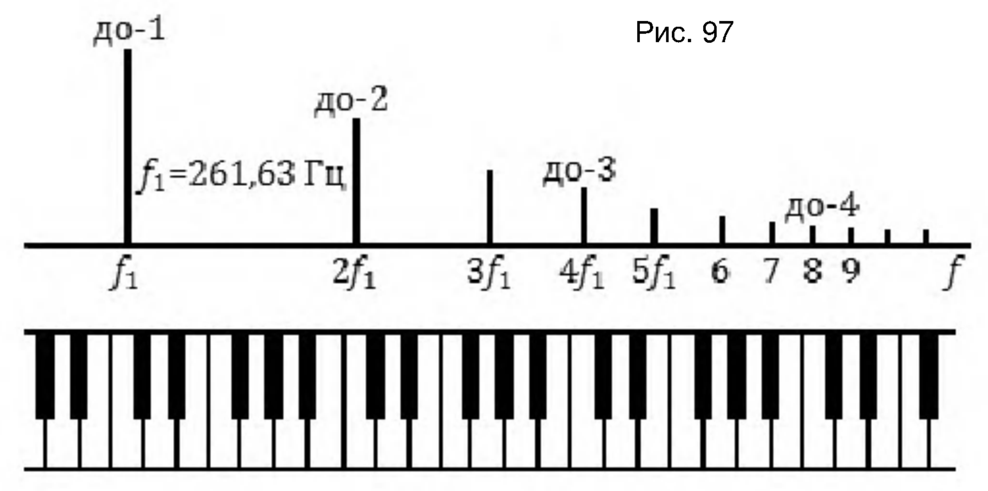
На рис. 95*д* показана первая гармоника струны **соль-1**, на рис. 95*е* – вторая. Видно, что колебания на рис. 95*е* находятся в резонансе с колебаниями на рис. 95*в*, изображающем третью гармонику струны **до-1**. Первая же и вторая гармоники струны **до-1** не будут возбуждены: в спектре струны **соль-1** (рис. 96*б*) нет совпадающих с ними гармоник. Однако шестая гармоника **до-1** будет возбуждена с помощью четвёртой гармоники **соль-1**, девятая – с помощью шестой, и т.д.

Если вы как следует прочувствовали эти диковинные вещи, то вы неминуемо задержитесь у пианино на десяток минут и найдёте у него самые невероятные возможности. Так, освободив соль малой октавы (**соль-*М***, $f = 392/2 = 196$ Гц) и ударив по **ми-1**, вы услышите **си-2**! Это значит, что третья гармоника струны **ми-1** возбудит пятую гармонику струны **соль-*М***:

$$5f_{(\text{соль-}M)} = 5 \cdot 196 = 980 \approx 3f_{(\text{ми-1})} = 3 \cdot 329{,}6 = 988{,}8 \approx f_{(\text{си-2})} = 987{,}8\,.$$

Из каждой струны можно извлечь только те ноты, которые являются гармониками основного тона. С помощью струны **соль-1** можно извлечь из струны **до-1** звуки **соль-2**, **соль-3** (см. рис. 96*а* и *б*), с помощью **до-*М*** можно извлечь **до-1**, **до-2**, **до-3**, с помощью **до-1** – слабый **ми-3** (как видно из рисунка, пятая гармоника **до-1** почти точно совпадает с точкой, изображающей **ми-3**). Но нет никакого способа (кроме уже упомянутого мороза) заставить струну **до-1** звучать, как **ре-1**, **ре-диез-1**, **ми-1** и т.д., так как в пределах первой октавы струна **до-1** содержит единственную гармонику. Однако в пределах второй октавы струна **до-1** даёт уже две гармоники, в пределах третьей – четыре, четвёртой – восемь, пятой – шестнадцать, шестой – тридцать две! Поскольку в октаве всего двенадцать нот, то на каждую из них придется почти по три гармоники от **до-1**. Следовательно, струна **до-1** принципиально могла бы дать любую ноту шестой октавы. Но для этого пришлось бы возбудить, например, сороковую гармонику струны **до-1**. Однако амплитуда её так мала, что столь высокую гармонику обычно услышать не удаётся.

На рис. 96*а* и *б* ось частот имеет равномерный масштаб. На рис. 96*в* изображена клавиатура пианино так, чтобы каждая клавиша заняла своё место на оси частот. Поскольку повышение тона на октаву требует удвоения частоты, то при равномерной шкале частот шкала нот (клавиатура) будет неравномерной. Наоборот, если в привычном масштабе изобразить клавиатуру (рис. 97), то неравномерной окажется шкала частот (логарифмический масштаб). Из рис. 97 особенно хорошо видно, что на каждую новую октаву приходится вдвое больше гармоник струны **до-1**, чем на предыдущую.



Описанное в задаче явление можно обнаружить и на гитаре. Роль демпфирующих молоточков должны выполнять пальцы левой руки. Известный гитаристам приём извлечения так называемых флажолетт имеет прямое отношение к нашей задаче.

V. Свет и тени

72. Звезда и спичка

А

Можно ли звезду закрыть спичкой, которую вы держите в вытянутой руке? Вы смóтрите одним глазом, второй закрыт.

Б

– А почему нельзя? Можно! Хотя спичка и маленькая, зато она близко. Ведь закрывает же во время полного солнечного затмения маленькая, но близкая Луна большое, но далёкое Солнце. Почему? Потому, что *угловые* размеры Луны несколько больше угловых размеров Солнца. Звёзды так далеки от нас, что, несмотря на свои огромные размеры, они даже в телескоп видны как точки. Иными словами, угловые размеры их ничтожно малы. Следовательно, как ни малы угловые размеры спички, они во много раз больше угловых размеров звезды.

Так рассуждали буквально все, кому предлагался этот вопрос. Однако давайте выйдем поздно вечером на улицу. Вот вам спичка. Выбирайте любую звезду. Вас постигнет неудача: закрыть звезду спичкой не удастся.

Ответить на поставленный вопрос нам помогут следующие факты. Во-первых, если бы вы могли повторить эксперимент днём, то убедились бы, что звезда закрывается спичкой. Разумеется, днём это можно проверить не на звезде, а на любом другом удалённом предмете, мало отличающемся от точки. Во-вторых, точку, нарисованную на бумаге, спичкой удаётся закрыть без труда. Правда, ночью это удаётся только при условии, что спичка находится ближе к точке, чем к глазу. Днём это удаётся всегда.

В

Нет столь великой вещи, которую не превзошла бы величиною ещё большая. Нет вещи столь малой, в которую не вместилась бы ещё меньшая.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 4

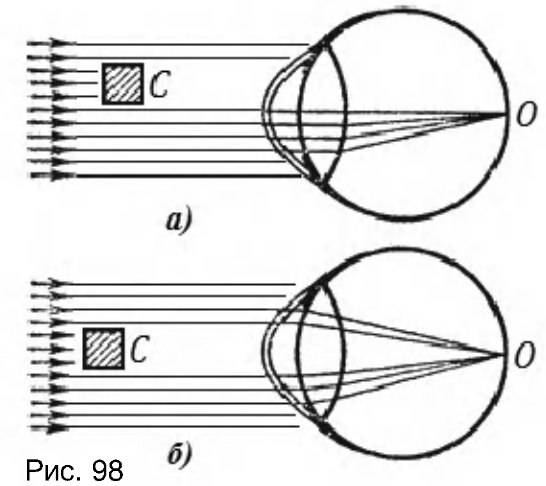


Рис. 98

Звезду в этой задаче можно рассматривать как точечный источник света, удалённый на бесконечно большое расстояние. В этих условиях все лучи от одной звезды, попадающие в глаз, параллельны. Зрачок же нашего глаза в этой задаче не может считаться точкой. Тем более он не является ею ночью, когда вы экспериментируете со звёздами: приспосабливаясь к темноте, зрачок максимально расширяется, чтобы побольше пропустить света. Создаваемая звездой тень спички, падая на зрачок, не покры-

вает его полностью. Поэтому при любом положении спички C (рис. 98*а* и *б*) часть лучей от звезды проходит в зрачок и образует на сетчатке глаза в точке O изображение звезды. При этом звезда кажется просвечивающей сквозь спичку, но, разумеется, выглядит менее яркой, так как часть её лучей перехватывается спичкой.

Днём зрачок, приспосабливаясь к яркому свету, сужается так, что его диаметр оказывается меньше толщины спички. В результате малый удалённый предмет спичкой может быть закрыт полностью. И не только малый, если спичку приблизить к зрачку.

С точкой, нарисованной на бумаге, дело обстоит несколько иначе. Эта точка не является удалённой. Следовательно, перехватываемые спичкой лучи, исходящие из этой точки, не параллельны. Чем ближе спичка к точке, тем больше лучей она будет перехватывать; в результате зрачок глаза может оказаться целиком в «тени» спички (рис. 99). Это произойдёт тогда, когда угловые размеры спички «с точки зрения точки» станут больше угловых размеров зрачка.

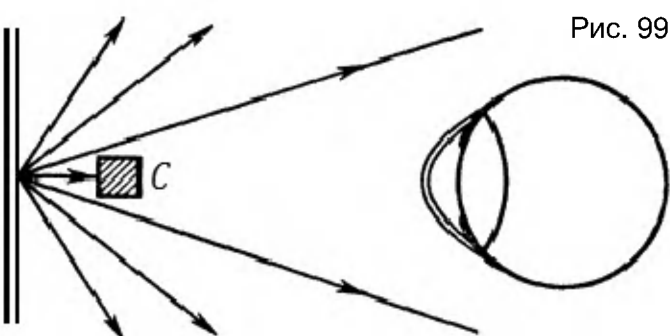


Рис. 99

73. Полная Луна

А

Видели ли вы когда-нибудь полную Луну?

Б

– Странный вопрос! Конечно, видели! А если кто-нибудь и не видел, то в течение ближайшего месяца может восполнить этот пробел в своём развитии: ведь полнолуние бывает каждый месяц.

Спорить против этого трудно. Но действительно ли в тот момент, который называют полнолунием, Луна является в полном смысле слова полной? При каких условиях Луна будет абсолютно полной?

В

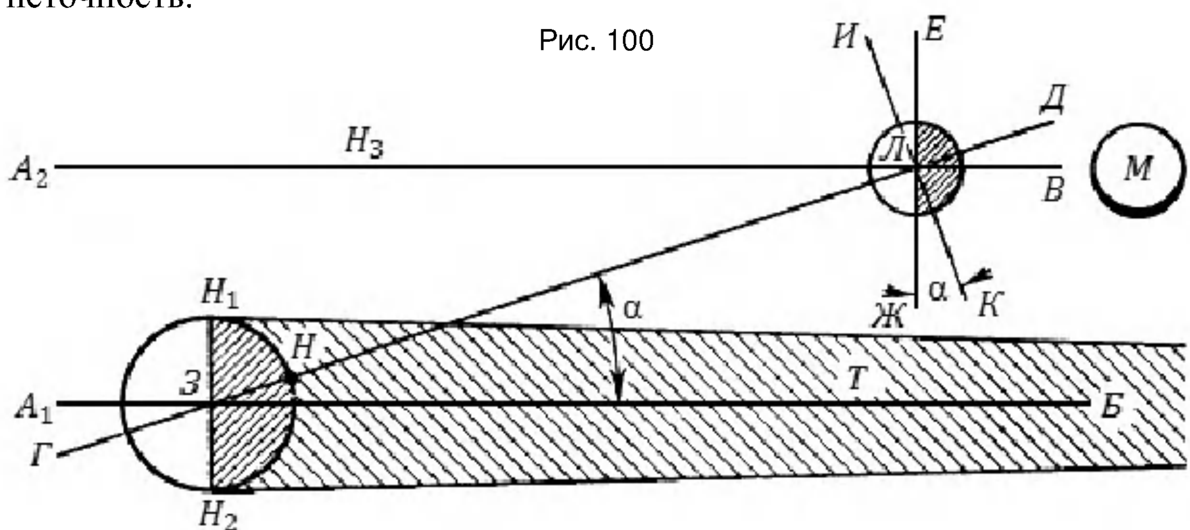
Полной Луну следовало бы называть только тогда, когда вся сторона, обращённая к наблюдателю, полностью освещена прямыми солнечными лучами. Но для этого необходимо, чтобы наблюдатель находился на прямой, соединяющей Солнце и Луну. Если наблюдатель находится на Земле, то на упомянутую прямую он может попасть *только вместе с Землёй*. Но тогда на Луну падает тень Земли и земной наблюдатель видит затмение Луны. При этом Луна Солнцем не освещена (точнее, еле-еле освещена красным светом солнечных лучей, обогнувших Землю за счёт рассеяния в земной атмосфере).

Конечно, называть полной Луну, покрытую тенью Земли, несколько нелогично. При любом же другом расположении Солнца, Земли и Луны последняя не может быть полной.

В полном смысле полной Луну увидеть может только наблюдатель, попавший на прямую Солнце – Луна один, *без Земли*. Таким наблюдателем может быть только космонавт. Разумеется, тенью (а вернее, полутенью), которую в этот момент будет отбрасывать на Луну космический корабль, можно пренебречь.

Из всего сказанного выше не следует, конечно, что слово «полнолуние» нужно отменить. Полнолунием условились называть самую полную фазу Луны из всех, которые возможны в течение данного месяца. Если это твёрдо помнить, то слово «полнолуние» не вводит в заблуждение и не вызывает никаких неудобств, несмотря на свою неточность.

Рис. 100



У читателя может возникнуть вопрос: в чём причина неполноты полнолуния и почему не каждое полнолуние сопровождается затмением Луны? Ответ на этот вопрос даёт рис. 100, на котором $З$ означает Землю, $Л$ – Луну, прямые $БА_1$ и $ВА_2$ указывают направление на Солнце, а заштрихованная область $Т$ – тень Земли (полутень на рисунке не показана). Если бы Луна обращалась вокруг Земли в той же плоскости, в которой Земля обращается вокруг Солнца, т.е. если бы прямые $ГД$ и $А_1Б$ совпадали, то Луна попадала бы в тень Земли ежемесячно, равно как и Земля в тень Луны. И мы ежемесячно видели бы два затмения: в полнолуние – лунное, в новолуние – солнечное.

Но плоскость орбиты Луны (на рисунке эта плоскость видна с ребра – прямая $ГД$) наклонена к плоскости эклиптики (прямая $А_1Б$) под углом $\alpha \approx 5°$. В результате Луна в полнолуние может пройти выше тени Земли (случай, показанный на рисунке) или ниже её (это произошло бы спустя примерно полгода, когда Солнце было бы правее Земли, в направлении $Б$, тень Земли – левее, Луна – на продолжении прямой $ЗГ$).

Полнолуние, показанное на рисунке, даёт возможность земному наблюдателю $Н$ увидеть Луну так, как это показано на рис. 100 ($М$): освещена почти вся видимая половина Луны, кроме узкого серпа внизу. В самом деле, Солнце по отношению к Луне находится на продолжении прямой $ЛА_2$ (в точке пересечения почти параллельных прямых $ЗА_1$ и $ЛА_2$) и освещает ту половину Луны, которая левее плоскости $ЕЖ$ (перпендикулярной к прямой $ЛА_2$). Земной же наблюдатель $Н$ видит ту половину Луны, которая левее плоскости $ИК$ (перпендикулярной к прямой $ЛН$). В результате наблюдатель видит и небольшой «ломтик» $ЖЛК$ неосвещённой половины Луны. В этом и состоит неполнота полнолуния. Угол, занимаемый этим «ломтиком», равен в данном случае $\alpha \approx 5°$ (вообще говоря, для различных наблюдателей он может быть неодинаковым; для наблюдателя $Н_1$ меньше почти на градус, для $Н_2$ – больше; кро-

ме того, этот угол несколько уменьшается из-за конечных угловых размеров Солнца и Луны). Полную Луну может увидеть только наблюдатель H_3, находящийся на прямой $ЛА_2$, т.е. вне Земли, на высоте около 30 000 км над районом Северного полюса.

При каких же условиях возможно затмение Луны? При условии, что полнолуние приходится на время, когда Луна находится в тесной близости от линии узлов – прямой, по которой пересекаются плоскость орбиты Луны и плоскость эклиптики. Оно возможно, например, спустя около четверти года от момента, показанного на рисунке. Если считать Землю неподвижной, то Солнце будет в это время над плоскостью рисунка, тень Земли будет направлена от вас в глубину книги, перпендикулярно к странице. И если прошло целое число месяцев с четвертью, то и Луна окажется на этой же прямой, под страницей, и попадёт в тень Земли.[1]

74. Даёшь полумесяц!

А

Представим, что лучшей половине человечества из непонятного (но обязательного для исполнения худшей половиной) каприза захотелось, чтобы Луна всегда была не слишком полной и не слишком серпом, а точно полумесяцем. Так сказать, не макси, не мини, а миди! Найдите геометрическое место точек в Солнечной системе, которые удовлетворяют этому капризу. Сумеете ли вы подобрать для Луны соответствующую орбиту?

Б

Рассмотрите треугольник Солнце–Земля–Луна. Каким он должен быть, чтобы мы с Земли видели лунный диск освещённым ровно наполовину?

В

Рис. 101 напоминает вам о том, как возникают различные фазы Луны. Размеры Луны и её орбиты на рисунке сильно преувеличены по сравнению с Солнцем, Землёй и расстоянием между ними $ЗС$. Это позволяет детально рассмотреть Луну и её фазы и, кроме того, не считаться с эффектами параллакса, вызываемыми конечными размерами Солнца и Земли.

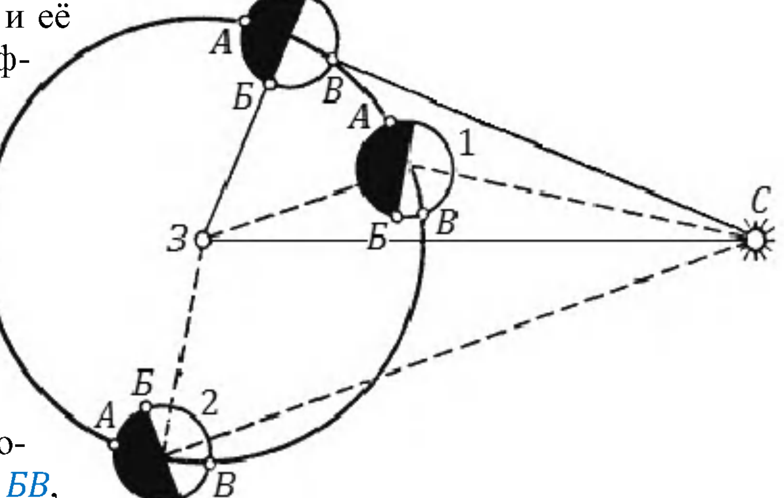


Рис. 101

В положении 1 (угол Земля–Луна–Солнце тупой) Земля видит бо́льшую часть Луны $АБ$ неосвещённой и меньшую $БВ$ (серпик) – освещённой. В положении 2 (угол $ЗЛС$ острый) – наоборот. В положении 4 (угол $ЗЛС$ прямой!) $АБ = БВ$,

[1] Более подробно об этом можно прочесть в книге: *Сытинская Н.Н.* Природа Луны. – М.: Физматгиз, 1959, с. 52-62.

т.е. мы видим полумесяц. Очевидно, прямой угол у Луны есть обязательное требование для фазы полумесяца.

Будем для простоты расстояние Земля–Солнце (*ЗС*) считать постоянным и прямую *ЗС* неподвижной. Найти геометрическое место вершин прямого угла, опирающегося на отрезок *ЗС*, легко: вспомним, что если вершина угла, опирающегося на диаметр, лежит на окружности, то этот угол – прямой. Значит, геометрическим местом положений Луны, дающих полумесяц, является окружность, построенная на отрезке *ЗС* как на диаметре (рис. 102). Переходя от плоского чертежа к трёхмерному космосу, мы в качестве искомого геометрического места будем иметь шаровую поверхность, построенную на том же диаметре.

Рис. 102

Геометрическое место точек для серпика 1 (рис. 101) также находится на дуге окружности (1 на рис. 102), только большего радиуса, так как теперь отрезок *ЗС* должен быть хордой (искомый угол – тупой, а не прямой). Любопытно, однако, что на продолжении дуги 1 (по другую сторону от точек *З* и *С*) будет не светлый, а тёмный серпик тех же размеров (фазы), т.е. светлая часть Луны будет не серпиком, а его дополнением до полной Луны. Если же требуется светлый серпик, то нужно построить дугу $1'$ того же радиуса, что и 1, но принадлежащую другой окружности. Итак, геометрическим местом серповидной Луны на плоскости является не окружность 1, а сочетание дуг 1 и $1'$. В пространстве геометрическим местом будет поверхность типа веретена, образованная вращением дуги 1 вокруг прямой *ЗС*. Аналогично, чёрный серпик (ущерблённая Луна) получается вращением дуги 2 вокруг той же прямой (при этом полученная поверхность напоминает поверхность яблока). Для полной Луны геометрическим местом точек являются две полупрямые: *З*5 и *С*$5'$ (однако на первой из них Луна находится в тени Земли, на второй – спрятана от нас за Солнцем); для новолуния – отрезок *ЗС*.

С геометрией покончено. Перейдём к физике (небесной механике). Задачу можно решить, остановив Луну (относительно Земли) в положении 4 (рис. 102). Но тогда она упадёт на Землю. Добровольно по окружности 4 Луна не пойдёт: траектория 4 явно не кеплерова (как и «веретено», и «яблоко»). Кроме того, даже если мы принудим её к этому с помощью двигателей, то она после полуоборота всё равно столкнётся либо с Солнцем, либо с Землёй.

Но нам вовсе не обязательно держать Луну в плоскости чертежа. Ведь геометрическим местом точек для полумесяца является сфера 4. Если бы Луна двигалась по окружности, перпендикулярной прямой *ЗС* (например, в плоскости *ГД*), то фаза её была бы постоянной (полумесяц – на сфере 4, серп – на веретене 1 и т.д.). Но эта траектория тоже не кеплерова: у кеплеровой центр притяжения (либо Солнце, либо Земля) должен находиться в плоскости орбиты. Задание будет «почти выполнено», если Луну заставить вращаться вокруг Солнца в плоскости *КМ*. Поскольку точки *К* и *М* мало отличаются от нужных *К*′ и *М*′, то и фаза Луны будет мало отличаться от полумесяца. Авось заказчик не заметит разницы! Тем более что теперь Луна будет

видна с Земли лишь как очень яркая точка, а проверить правильность выполнения задания можно только через телескоп. Кроме трудностей перевода Луны на эту орбиту здесь есть и другие: плоскость должна быть всегда перпендикулярна прямой $ЗС$, которая, как известно, поворачивается. Итак, придётся ещё заставить плоскость $КМ$ совершать один оборот в год вокруг оси $КМ$.

После всех этих фантастических трудностей орбита в плоскости PT (содержащей Землю) кажется почти реальной (хотя плоскость PT тоже нужно поворачивать, как и $КМ$). Ещё ближе к реализуемости проект, в котором используется не сама Луна, а её эрзац, созданный искусственно. Выведем на орбиту в плоскость PT диск (диаметром 90 км, расстояние от Земли 10 тыс. км). Пристроим перпендикулярно диску гантель (см. задачу «Гантель в космосе») длиной порядка 1000 км, тогда диск всё время будет смотреть на Землю и будет неотличим от шара (впрочем, можно сделать и надувной шар). Зачерним половину диска (шара), а вторую сделаем люминесцирующей или прозрачной, тогда внутрь можно поместить источники света (питаемые от солнечной батареи, роль которой, возможно, удастся поручить зачернённой половине). Заказ исполнен. Правда, с помощью поддельной Луны, но подделки сейчас в большой моде у вышеупомянутого заказчика.

75. Сириус увидеть нельзя

А

В одном из молодёжных журналов несколько лет назад приводилась такая задача: «Какой телескоп нужен, чтобы с 220 км увидеть футбольный мяч диаметром 25 см?» И тут же было изложено решение:

«Невооружённым глазом мяч виден под углом

$$\frac{25}{220 \cdot 10^5} \cdot \frac{360°}{2\pi} \approx \frac{1}{223} \text{ угловой минуты.}$$

Чтобы видеть предмет, необходимо, чтобы он наблюдался под углом, не меньшим чем $1'$. Значит, телескоп должен увеличивать более чем в 223 раза».

Найдите ошибку в рассуждениях. Докажите, что в приведённой форме задача вообще не может быть решена. Сформулируйте задачу заново и решите её.

Б

Вместо подсказки дадим ещё одну задачу, точную копию предыдущей, но способную сделать очевидной её абсурдность. Какой телескоп нужен, чтобы увидеть звезду Сириус? Расстояние до Сириуса 9,7 световых лет (около $9 \cdot 10^{13}$ км), диаметр его – полтора солнечного (около, $2 \cdot 10^6$ км). Решая описанным выше «методом», получим следующее. Невооружённым глазом Сириус виден под углом

$$\frac{2 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{13}} \cdot \frac{360°}{2\pi} \approx \frac{1}{13\,000} \text{ угловой минуты.}$$

Следовательно, чтобы увидеть Сириус, нужно иметь телескоп, увеличивающий более чем в 13 000 раз. А поскольку пока что таких телескопов нет, то при современном состоянии техники увидеть Сириус нельзя. Это и есть обещанный абсурд. На самом деле Сириус виден даже невооружённым глазом. Более того, он является вообще самой яркой звездой на нашем небе (не считая Солнца).

Невооружённым глазом можно видеть звёзды шестой величины, а Сириус имеет звёздную величину минус 1,6, т.е. в $2{,}5^{6+1{,}6} = 2{,}5^{7{,}6} \approx 1000$ раз ярче звезды, находящейся на пределе невооружённого зрения[1]. Следовательно, чтобы увидеть Сириус, глаз не только не надо ничем вооружать, но даже можно существенно «разоружить» (например, разглядывая звезду в перевёрнутый бинокль). Однако днём Сириус невооружённым глазом увидеть удаётся, лишь когда точно знаешь, где он находится.

В

Чтобы источник квантов был виден, нужно, чтобы число квантов света, попадающих на данный элемент сетчатки глаза, было достаточным для его возбуждения. Мы, однако, не будем вычислять число квантов, так как нам понадобилось бы много справочных данных: спектральная чувствительность зрения (различная для разных длин волн), распределение по спектру энергии освещающего мяч Солнца, распределение коэффициента отражения мяча по спектру и др. Проще найти ответ методом сравнения мяча как отражателя с небесным телом, отражающие свойства которого такие же, а расстояние и видимость общеизвестны.

Возьмём мяч диаметром $d = 25$ см, отражающий свет так же плохо, как и Луна, т.е. с коэффициентом отражения (альбедо), равным 0,07, причём того же цвета (с той же отражательной способностью на разных длинах волн). Обычный футбольный мяч с коричневой покрышкой – хорошая модель Луны по альбедо и по цвету. Отодвинем мяч на такое расстояние, при котором угловые размеры мяча и Луны будут одинаковы – полградуса. Расстояние до мяча будет равно

$$l \approx \frac{d}{\mathrm{tg}\, 0{,}5^\circ} \approx \frac{0{,}25}{0{,}0087} \approx 29 \text{ м}.$$

Если бы Луна и мяч были одинаково освещены Солнцем, то и видны наблюдателю они были бы одинаково (различием атмосферных условий пренебрегаем). Видимая звёздная величина полной Луны равна $-12{,}7$. Такова она будет и для «полного» мяча. Как далеко теперь его нужно отодвинуть, чтобы он оказался на пределе видимости невооружённым глазом, т.е. превратился в звезду шестой величины? Для этого он, как светило, должен ослабнуть на $6 + 12{,}7 = 18{,}7$ звёздной величины, т.е. в $2{,}5^{18{,}7} \approx 3 \cdot 10^7$ раз (предполагается, что наблюдения проводятся на фоне ночного неба). Количество света, попадающего в глаз, обратно пропорционально квадрату расстояния от источника, каковым сейчас является мяч. Следовательно, расстояние до мяча должно увеличиться в $\sqrt{3 \cdot 10^7} \approx 5500$ раз:

$$L = 5500\, l \approx 160 \text{ км}.$$

А если бы мяч был белым? Ну, хотя бы как бумага (альбедо 0,8)? Он был бы виден с расстояния в $\sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}07}} \approx 3{,}4$ раза большего, т.е. $L \approx 550$ км. Это даже больше, чем требуемые в задаче 220 км, тем не менее никакого телескопа не требуется.

[1] Звезда первой величины ярче звезды шестой величины в 100 раз, т.е. разница в одну звёздную величину соответствует отношению яркостей $\sqrt[5]{100} \approx 2{,}5$.

Заметим, однако, что если бы мяч освещался Солнцем сбоку или сзади, т.е. выглядел бы как тонкий серп, то при таком расстоянии понадобился бы телескоп, тем более сильный, чем у́же этот серп.

Сфокусированный луч лазера может на небольших площадках создавать освещённости в тысячи раз бо́льшие, чем Солнце. Мяч, освещённый с Земли лучом лазера, можно увидеть невооружённым глазом за многие тысячи километров. Однако днём, на фоне ярко-голубого неба, увидеть его было бы труднее.

Итак, задача вообще не может быть решена, пока не указаны коэффициент отражения мяча, яркость фона, источник освещения и угол, под которым расположены источник света и мяч относительно наблюдателя.

Какую же ошибку в рассуждениях допустил автор задачи? Он неправильно полагает, что для того, чтобы видеть предмет, нужно, чтобы он наблюдался под углом, не меньшим чем $1'$. Угловая величина Сириуса в $13\ 000$ раз меньше, однако он хорошо виден. Угол в $1'$ – это угловая разрешающая способность нормального зрения. Для того чтобы две светлые точки (например, два мяча в космосе) были видны раздельно, нужно, чтобы угол между ними был не менее $1'$. Если он меньше $1'$, то обе точки в глазу проектируются на одно нервное окончание и сливаются в сознании в одну точку; если больше – то на два разных, и тогда мозг зафиксирует две точки.

При наблюдении за одним мячом угол более $1'$ нужен не для того, чтобы увидеть мяч, а для того, чтобы увидеть *детали* этого мяча (например, серповидность его освещённой части). Но это уже не задача обнаружения, а задача распознавания образов. Для этого и нужен телескоп с увеличением, бо́льшим чем в 223 раза. А для поставленной задачи имеет значение не столько большое увеличение, сколько большая светосила прибора, которая тем больше, чем больше диаметр его «входного зрачка». Можно взять телескоп с огромным увеличением и не увидеть в него ни мяч, ни Сириус, если телескоп сильно диафрагмировать, хотя диафрагмирование не меняет увеличения прибора, а только снижает его светосилу.

76. Двухпозиционная локация

А

На сколько нужно отодвинуть Луну, чтобы она оказалась на пределе видимости невооружённым глазом?

Б

Задача кажется повторением предыдущей. С расстояния 29 м мяч, освещённый полностью солнечным светом, имеет такую же звёздную величину ($-12{,}7$), как и полная Луна. Увеличивая расстояние до мяча в 5500 раз (см. предыдущую задачу), т.е. до 160 км, мы превратили его в объект 6-й звёздной величины, находящийся на пределе видимости. То же надо сделать и с Луной. Увеличивая расстояние до Луны в 5500 раз, мы получаем решение задачи. Новое расстояние до Луны

$$R_1 = 5500 \cdot 380\ 000 \approx 2100 \cdot 10^6 \text{ км}\,.$$

Эта величина, полученная по аналогии с предыдущей задачей, не вызывает у вас сомнений, пока вы не представите, где при этом окажется Луна. А она окажется между Сатурном ($1426 \cdot 10^6$ км от Солнца) и Ураном ($2869 \cdot 10^6$ км). Сравним Луну с

Ураном. Диаметр Урана в 10,3 раза больше диаметра Луны (главное сечение – в $10{,}3^2 \approx 106$ раз), и его альбедо (0,66) – в 10 раз. Следовательно, отодвинутая Луна будет слабее Урана в

$$\frac{0{,}66}{0{,}07} \cdot 10{,}3^2 \cdot \frac{2100^2}{2869^2} = 540 \text{ раз ?}$$

Но видимая звёздная величина Урана равна $+5{,}7$, т.е. он уже находится практически на пределе видимости. А Луна – в 540 раз слабее! Это противоречит нашему решению: ведь мы её отодвигали именно на предел видимости.

Аналогичная неувязка результатов получается, если сравнивать отодвинутую Луну со спутниками Юпитера. Для Юпитера и его спутников расстояние от Солнца $R_2 = 778 \cdot 10^6$ км, т.е. расстояние от земного наблюдателя, соответствующее полной фазе Юпитера и спутников (противостояние), равно

$$R_1' \approx (778 - 149) \cdot 10^6 = 629 \cdot 10^6 \text{ км}.$$

Первый спутник Юпитера Ио по размерам совпадает с Луной ($d_{Ио} = 3460$ км, $d_Л = 3476$ км), по альбедо (0,57) превосходит её в 8 раз. Видимая звёздная величина в противостоянии равна $+5$, т.е. лишь в 2,5 раза лучше предела видимости. Значит, Луна, отодвинутая на $2100 \cdot 10^6$ км, будет видна слабее в

$$\frac{0{,}57}{0{,}07} \cdot \frac{2100^2}{629^2} \approx 90 \text{ раз},$$

т.е. находится далеко за пределами видимости.

Мы опять получили большую ошибку в ту же сторону, в сторону ослабления видимости Луны по сравнению с заданной. Эти неувязки результатов означают одно из двух: либо астрономы неправильно рассчитали всю Солнечную систему, либо данная задача вовсе не является повторением предыдущей. А то, что различные проверки (по Урану и Ио – объектам, находящимся на разных дальностях) дают существенно разную величину ошибки (в 90 и 540 раз), означает, что зависимость видимости объекта от дальности в этой задаче является существенно иной, чем в предыдущей. В частности, рост ошибки с расстоянием означает, что эта зависимость более сильная, чем обратная пропорциональность квадрату расстояния.

В

В предыдущей задаче расстояния Земля–мяч (29 м и 160 км) и Земля–Луна были пренебрежимо малыми по сравнению с расстоянием Земля–Солнце. Здесь же расстояние Земля–Луна (отодвинутая) существенно больше расстояния Земля–Солнце. Это придаёт совершенно иной характер задаче: ведь Солнце – источник света для мяча и Луны, и расстояние до него небезразлично для освещённости и видимости этих объектов.

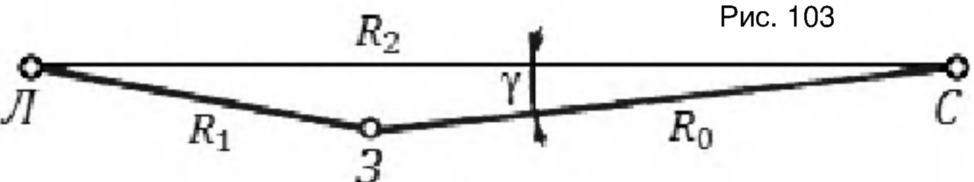


Рис. 103

Отодвигая мяч вдвое дальше, мы могли с полным основанием утверждать, что освещённость его не меняется, а поэтому количество света, попадающего от мяча в глаз, уменьшается вчетверо: принимаемая мощность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света (мяча):

$$P_{пр} = \frac{K_1}{R_1^2}. \quad (1)$$

Отодвигая Луну на миллионы километров (рис. 103), мы должны уже учитывать, что мы её отодвигаем не только от Земли (R_1), но и от Солнца (R_2), отчего отражаемая мощность

$$P_{отр} = \frac{K_2}{R_2^2}. \quad (2)$$

Мы не будем детально расшифровывать смысл коэффициентов пропорциональности K_1 и K_2, отметим только, что $P_{пр}$ пропорционально $P_{отр}$, т.е. $P_{отр}$ содержится неявно в коэффициенте K_1:

$$K_1 = K_3 \cdot P_{отр}. \quad (3)$$

Тогда

$$P_{пр} = \frac{K_1}{R_1^2} = \frac{K_3 \cdot P_{отр}}{R_1^2} = \frac{K_3 K_2}{R_1^2 R_2^2} = \frac{K}{(R_1 R_2)^2}. \quad (4)$$

Эта формула очень любопытна: принимаемая наблюдателем мощность обратно пропорциональна *квадрату произведения обоих расстояний*!

Чтобы решить задачу, полезно несколько преобразовать формулу **(4)**. Будем интересоваться полной (или почти полной) Луной, для чего, как известно из предыдущих задач, нужно, чтобы на рис. 103 угол $\gamma \to 0$. Тогда в формуле **(4)** можно одну переменную (R_2) просто выразить через другую (R_1):

$$R_2 = R_1 + R_0, \quad (5)$$

и, следовательно,

$$P_{пр} = \frac{K}{R_1^2 (R_1 + R_0)^2}. \quad (6)$$

Для Луны в её законном положении

$$P_{пр\,Л} = \frac{K}{R_Л^2 (R_Л + R_0)^2}. \quad (7)$$

Тогда

$$\frac{P_{пр\,Л}}{P_{пр}} = \frac{R_1^2 (R_1 + R_0)^2}{R_Л^2 (R_Л + R_0)^2}. \quad (8)$$

С учётом предыдущей задачи $\dfrac{P_{пр\,Л}}{P_{пр}} = 2{,}5^{18{,}7} = 3 \cdot 10^7$. Знаменатель формулы **(8)** известен:

$$R_Л^2 (R_Л + R_0)^2 = 0{,}38^2 (0{,}38 + 149)^2 \cdot 10^{24}\ км^4 = 3230 \cdot 10^{24}\ км^4,$$

поэтому требуемая величина

$$R_1^2 (R_1 + R_0)^2 = 3 \cdot 10^7 \cdot 3230 \cdot 10^{24}\ км^4 \approx 10^{35}\ км^4. \quad (9)$$

Мы получили уравнение четвёртой степени

$$R_1^4 + 2R_1^3 R_0 + R_1^2 R_0^2 - 10^{35} = 0. \quad (10)$$

Его точное решение крайне громоздко и не в духе нашей книги: поскольку оно уже есть в справочниках, то нас оно не интересует. Поэтому мы ограничимся простым подбором. При $R_0 \ll R_1$ формула **(9)** упрощается:

$$R_1^4 \approx 10^{35}\ км^4,$$

что даёт $R_1 \approx 5{,}6 \cdot 10^8$ км. Поскольку это R_1 всё-таки не так уж сильно превосходит

R_0, то настоящее R_1 будет несколько меньше. Беря наугад $R_1 = 5 \cdot 10^8$ км, получаем по точной формуле **(9)**

$$(5 \cdot 10^8)^2 \cdot (5 \cdot 10^8 + 1{,}49 \cdot 10^8)^2 = 1{,}05 \cdot 10^{35} \approx 10^{35} .$$

Итак, Луну нужно отодвинуть от Земли приблизительно на $R_1 = 500 \cdot 10^6$ км (примерно на средину между Марсом и Юпитером).

Имеют ли полученные результаты [главный из них – формула **(4)**] какое-либо практическое значение? Казалось бы, нет: ведь ни автор, ни читатели не собираются всерьёз передвигать куда-либо Луну, тем более с такой ограниченной целью. Однако представьте себе какое-либо небесное тело, обращающееся вокруг Солнца по очень вытянутой эллиптической орбите. Такие тела в Солнечной системе есть: малые планеты – астероиды (Гидальго, Икар и др.). У астероида Адонис, например, перигелий находится вблизи орбиты Меркурия, а афелий – вблизи орбиты Юпитера. Ясно, что формула **(4)** необходима для вычисления их видимости (с поправкой на фазу планеты). И вообще формула **(4)** описывает наблюдаемость любого отражателя для случая, когда источник излучения (Солнце, передатчик и др.) и наблюдатель отражённого сигнала (Земля, приёмник и др.) находятся в разных точках (занимают разные позиции). Например, формула **(4)** описывает условия обнаружения отражающей цели (самолёта и др.) в двухпозиционной радиолокации.

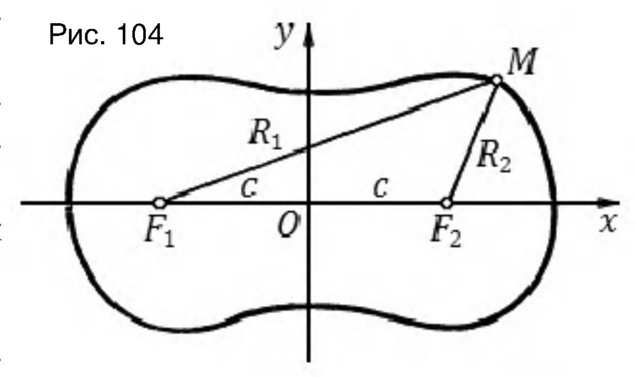


Рис. 104

Преобразуем формулу **(4)** к каноническому виду. Пусть в системе декартовых координат (x, y) на оси x симметрично относительно нуля расположены передатчик F_1 и приёмник F_2 (рис. 104). Найдём геометрическое место точек отражателя M, для которых его наблюдаемость приёмником F_2 постоянна. Очевидно, это множество точек, для которых $\dfrac{1}{R_1^2 R_2^2} = \text{const}$ или, что то же самое,

$$R_1 R_2 = \text{const} = a^2 . \qquad \textbf{(11)}$$

Обозначим $F_1 O = OF_2 = c$ и выразим R_1 и R_2 через c, x и y. Из рис. 104 видно, что

$$R_1^2 = y^2 + (x + c)^2 , \quad R_2^2 = y^2 + (x - c)^2 . \qquad \textbf{(12)}$$

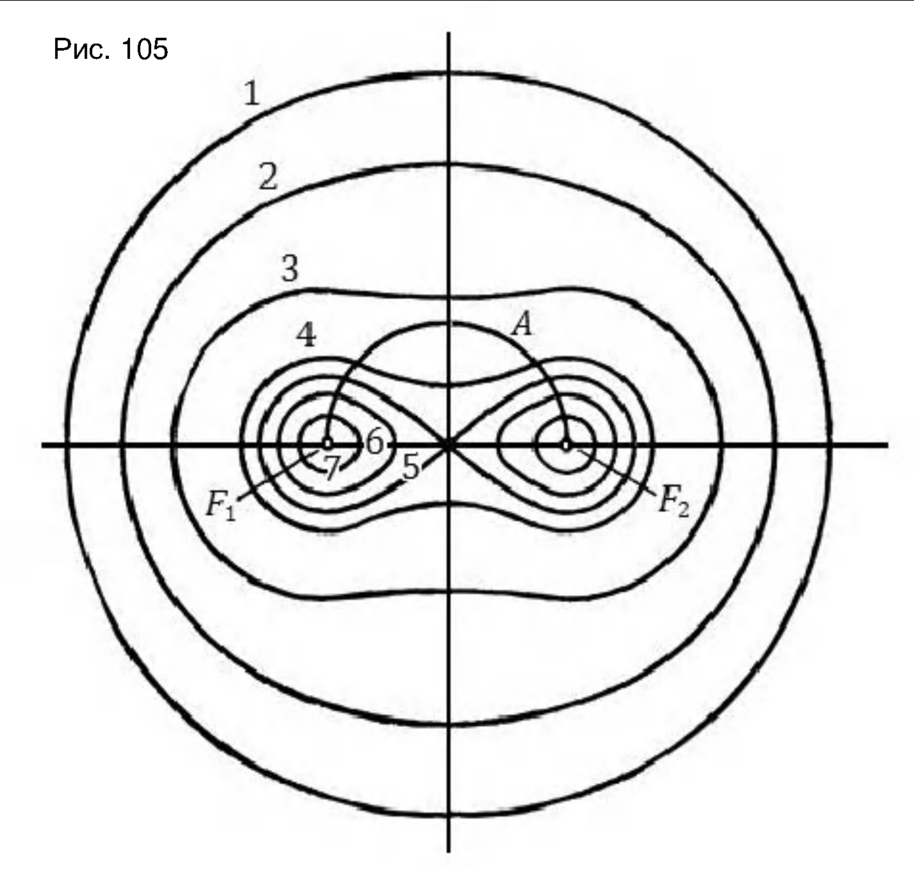
Тогда $R_1^2 R_2^2 = a^4 = [y^2 + (x + c)^2][y^2 + (x - c)^2]$, и после элементарных преобразований получаем

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4 . \qquad \textbf{(13)}$$

Это есть уравнение овала Кассини – геометрического места точек M, для которых *произведение* расстояний R_1 и R_2 от двух фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная. Полезно сравнить с определением эллипса – геометрического места точек, для которых *сумма* расстояний R_1 и R_2 от двух фокусов F_1 и F_2 есть величина постоянная.

Форма овала Кассини (рис. 105) весьма причудливо зависит от отношения между c и $a = \sqrt{R_1 R_2}$. При $a > c\sqrt{2}$ овалы имеют эллипсовидную форму (овалы 1 и 2); при $c < a < a\sqrt{2}$ овал имеет два утолщения (кривые 3 и 4); при $a = c$ кривая приобретает вид «восьмёрки» (кривая 5, этот частный случай овала Кассини называется лемнискатой Бернулли); при $a < c$ овал распадается на два яйцевидных овала (кри-

Рис. 105



вые 6 и 7). Предельными случаями овалов Кассини являются окружности. При $a \to \infty$ имеем окружность бесконечно большого радиуса $R_1 = R_2 = R = a$. Формально этот результат получается из уравнения **(13)**, которое при $c \to 0$ превращается в уравнение окружности радиуса a с центром в начале координат $x^2 + y^2 = a^2$. Случай $a \to \infty$ при $c = \text{const}$ геометрически подобен случаю $c \to 0$ при $a = \text{const}$. Физически это означает, что при $a \gg c$ можно пренебречь расстоянием между двумя позициями F_1 и F_2 и считать радиолокатор однопозиционным, для которого $\frac{1}{R_1^2 R_2^2} = \frac{1}{R^4}$. При $a \to 0$ два частных овала стягиваются к двум бесконечно малым окружностям, охватывающим точки F_1 и F_2 (все манипуляции с мячом в предыдущей задаче мы проделывали в очень малой окрестности точки F_2).

Для радиолокации (светолокации в астрономии, звуколокации и др.) овалы Кассини имеют следующий смысл. От цели, находящейся в любой точке на данном овале, в фокусе будет принята одна и та же мощность (если передатчик, облучающий цель, находится во втором фокусе). Если эта мощность находится на пределе чувствительности, то данный овал охватывает собой зону действия радиолокатора. В трёхмерном пространстве это поверхность, образованная вращением овала вокруг оси x. Мощность принятого сигнала тем выше, чем больше номер овала Кассини, на котором находится цель (если нумеровать, как на рис. 105).

На рис. 105 кривая F_1AF_2 – полуокружность, построенная на отрезке F_1F_2 как на диаметре. Если вспомнить задачу «Даёшь полумесяц!», то это есть геометрическое место точек, в которых Луна имеет фазу полумесяца. Кривая A удобна для нашего анализа, так как позволяет не беспокоиться о постоянстве фазы. Видно, что вблизи точек F_1 и F_2 кривая A пересекает овалы с высоким номером, а посредине – с малым. Это означает, что Луна будет давать на Земле одинаково интенсивный свет в двух положениях: F_2 рядом с Землёй и F_1 рядом с Солнцем, хотя угловые размеры

её при наблюдении с Земли велики в первом случае и ничтожно малы во втором. Правда, чтобы, находясь рядом с F_1, освещать Землю так, как она освещает её на своём законном месте, Луна должна находиться уже внутри Солнца (радиус Солнца больше расстояния Земля – Луна).

Впрочем, формула **(4)** выведена в предположении точечного источника света и поэтому в непосредственной близости от реального Солнца даёт некоторую погрешность.

Если Луна находится на середине дуги F_1AF_2, то сигнал от неё довольно мал (меньше, чем от Меркурия).

Аналогично ведёт себя и сигнал, отражённый от самолёта. Так, например, описанная в конце задачи «Домашний радиолокатор» помеха от самолёта телевидению проявляется сильно, когда самолёт пролетает в непосредственной близости или от приёмной антенны телевизора, или от передающей антенны телецентра. Самолёт почти не даёт помехи, когда пролетает на полпути между телевизором и телецентром. Зона действия мешающего самолёта для вашего телевизора, таким образом, распадается на два яйцевидных овала, один из которых охватывает телецентр, а второй – ваш телевизор.

77. В ветреную погоду

А

Ярко светит Солнце. На полу комнаты виден прямоугольник света из окна, разбитый тенью рамы на квадратики. Но вот набежало облако. И вдруг, вместо того чтобы исчезнуть, прямоугольник света беспорядочно зашатался вправо, влево, вперёд, назад. Как это объяснить?

Б

Посмотрите на облако – оно рваное.

В

Взирая на солнце, прищурь глаза свои,
и ты смело разглядишь в нём пятна.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 141

Явление объясняется тем, что Солнце – не точечный источник света, а набежавшее облако – рваное. Комбинация большого по угловым размерам источника света и движущегося отверстия в экране равносильна перемещающемуся источнику света.

1 2 P 2′ 1′

Рис. 106

На рис. 106 показано Солнце и обрывок облака в два разных момента. В момент 1 открыт левый край Солнца, в момент 2 – правый. Открытый край является источником света, создающим изображение на полу. Как видно из рисунка, левый край Солнца 1 создаёт тень рамы P в точке $1'$, а правый – в точке $2'$. Если

облако сильно рваное и быстро мчится по небу, то тень рамы будет быстро и довольно беспорядочно колебаться в пределах $1'$ и $2'$. Эти пределы можно вычислить. Пусть расстояние от некоторой точки рамы до её тени на полу равно r. Поскольку угловой диаметр Солнца равен 0,5° (≈ 0,01 рад), то размах колебаний Δl будет равен

$$\Delta l \approx 0{,}01r\ .$$

Если, например, $r = 5$ м, то $\Delta l \approx 5$ см.

После некоторого времени наблюдений вы начнёте улавливать, что основной характер движения тени состоит в перемещении в определённом направлении. Ясно, что это направление противоположно направлению движения облаков.

Особенно отчётливо это направление заметно, если по солнечному диску проходит маленькое отверстие в плотном облаке. Впрочем, если облако изорвано настолько мелко, что по солнечному диску одновременно проходит несколько отверстий, то вы увидите одновременно от одной рамы несколько теней различной интенсивности.

Нечто подобное вы увидите и в случае, когда Солнце закрыто деревом и его лучи освещают ваше окно сквозь колеблющуюся листву. Только в перемещениях тени рамы в этом случае меньше порядка: в отличие от обрывков облака, бегущих более или менее согласованно друг с другом (по направлению ветра), листья колеблются хаотичнее.

78. Тень столба

А

Столб высотой $h = 5$ м и толщиной $b = 10$ см отбрасывает на равнину длинную тень: Солнце уже клонится к закату, высота его над горизонтом всего лишь $\varphi = 10°$. Чему равна длина тени столба? Какова будет её длина, если высоту столба увеличить вдвое?

Б

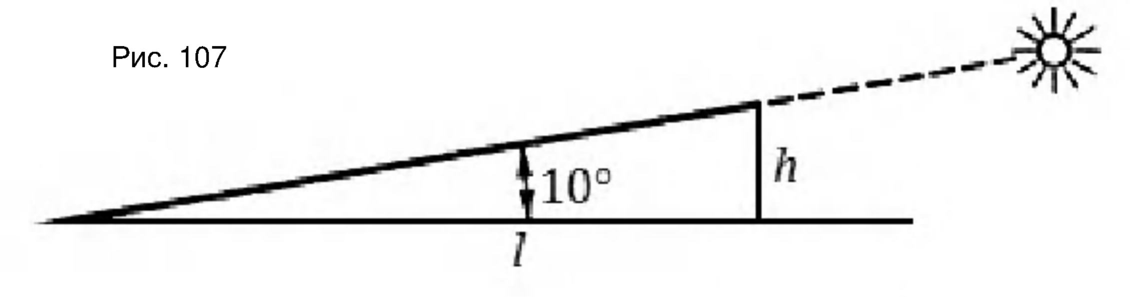
Тот, кто подходит к задаче невнимательно, решает задачу в два счёта: он рисует чертёж, подобный рис. 107, затем вычисляет:

$$l_1 = h_1 \operatorname{ctg} 10° \approx 5 \cdot 5{,}67 = 28{,}35\ \text{м}\ .$$

Для второго столба длина тени

$$l_2 = 2l_1 = 56{,}7\ \text{м}\ .$$

Внимательный же читатель заметит, что в таком решении никак не использована одна величина, приводимая в исходных данных, а именно толщина столба. При чём тут толщина столба? Какое отношение она имеет к длине тени? Читатель, поставивший эти вопросы, уже близок к правильному решению задачи.



В

Если бы тени предметов зависели не от величины сих последних, а имели бы свой произвольный рост, то, может быть, вскоре не осталось бы на всём земном шаре ни одного светлого места.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 29

Приведённый выше способ вычисления длины тени верен только в случае, когда угловые размеры источника света ничтожно малы («точечный» источник). Солнце – далеко не точка. Его угловые размеры α равны приблизительно 0,5°. Тень в данной точке возможна только при условии, что для этой точки источник света закрыт

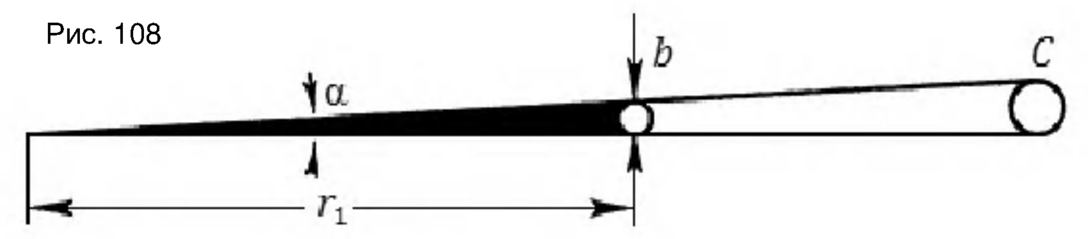


Рис. 108

полностью. В данном случае источник света закрывается сравнительно тонким столбом. Поэтому вполне вероятно, что в том месте, где при расчёте по приведённым выше формулам должна находиться тень вершины столба, на самом деле будет всего лишь полутень, бледная, еле заметная, а то и совсем незаметная. Полная тень будет только в тех точках, для которых видимые угловые размеры толщины столба α_2 превосходят угловые размеры α Солнца C, т.е.

$$\alpha_2 \geqslant \alpha = 0{,}5^\circ\,.$$

Отрезок $b = 10$ см виден под углом α_2 (рис. 108) с расстояния r_1, которое можно найти из приближённой формулы

$$\sin\alpha \approx \frac{b}{r_1}.$$

Угол α_2 будет равен углу α, если

$$r_1 = \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{10}{0{,}0087} = 1140 \text{ см} = 11{,}4 \text{ м}\,.$$

На рис. 109 показан столб BO высотой h, его тень A_1O длиной l_1 и полутень AA_1. Длину тени, очевидно, можно найти из треугольника A_1B_1O, у которого гипотенуза равна вычисленному r_1:

Рис. 109

$$l_1 = r_1 \cos 10^\circ \approx 11{,}4 \cdot 0{,}985 \approx 11{,}2 \text{ м}\,.$$

В вычислениях длины тени второго, более высокого столба, очевидно, нет необходимости. При данной толщине столбов длина тени не зависит от их высоты, если высота превосходит некоторую критическую, равную в нашем случае

$$h_{\text{кр}} = r_1 \sin 10^\circ \approx 11{,}4 \cdot 0{,}174 \approx 2 \text{ м}\,.$$

И только если $h < h_{\text{кр}} = 2$ м, то длина тени пропорциональна высоте столба.

79. К вопросу о схематизме в искусстве

А

В кинофильме «Свадебный звон» есть такой кадр. В большой спокойной луже отражается яркое солнце (рис. 110*а*). Герой, будучи в приподнятом настроении, подходит к луже и начинает шевелить воду, любуясь тем, как волны раскалывают отра-

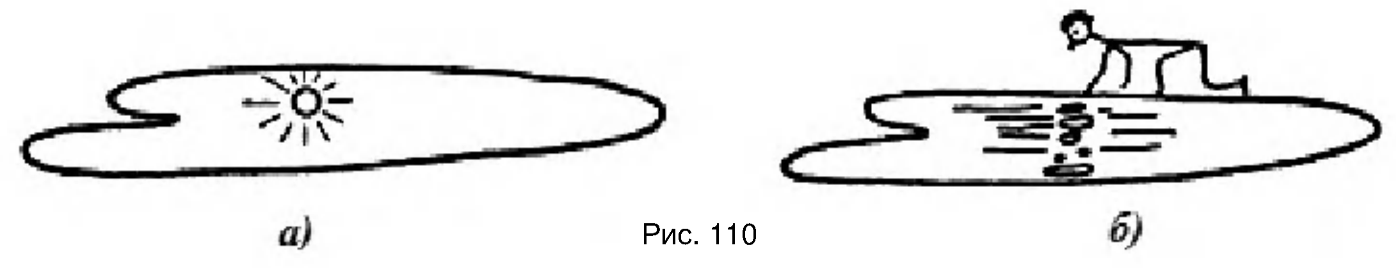


Рис. 110

жение Солнца на осколки (рис. 110*б*). Найдите ошибку в замысле режиссёра и попробуйте её исправить.

Б

Прежде всего, мы извиняемся перед читателями за схематичность героя на нашем рисунке. Впрочем, в кинофильме герой ещё схематичнее.

Мы, зрители, смотрим события фильма через объектив кинокамеры. Иными словами, наша точка зрения совпадает с точкой зрения камеры (более точно: камера навязывает нам свою точку зрения).

В кадре герой – по ту сторону лужи. Следовательно, зритель (камера) – по эту. Если зритель и герой – на разных берегах, то один из двух не может видеть отражение Солнца в воде. Зритель видит. Следовательно, герой – нет. А тогда чем же он любуется?

В

Если хочешь быть красивым, поступи в гусары.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 16

Трудно предположить, что режиссёр, а тем более оператор, крутящий ручку кинокамеры, не знают законов отражения света. Но даже если бы они и подзабыли, физика немедленно указала бы им на ошибку. Можно представить, что артист, которого режиссёр послал потрепать покровительственно Солнце по шевелюре, удивлённо воскликнул:

– Но я его не вижу!

На что режиссёр, стоящий по эту сторону лужи, не менее удивлённо произнёс:

– Не может быть!

И сам сходил на тот берег – и убедился, что физика – серьёзное дело. А потом добавил, спасая ситуацию (надо спешить: объект съёмки уже сидит в луже!):

– Ну, а зачем тебе видеть? Видеть должны зрители! Твоё дело любоваться, да так убедительно, чтобы зрители тебе поверили!

На том и порешили. И допустили ошибку: зритель-то дотошный пошёл! Подавай ему правду жизни! Он теперь разбирается не только в детективах, не только в ро-

манах на производственную тему, но и в физике: у него образование не такое уж среднее, как это может показаться.

Как можно было бы исправить названный кадр? Ну, конечно же, надо было героя оставить на одном берегу с нами. А если это неудобно из-за неудачного ракурса (съёмка с затылка), то можно было бы и вообще пожертвовать этим кадром.

Этой «рецензией» мы не хотим обидеть коллектив, работавший над фильмом. Тем более что с тех пор он значительно продвинулся вперёд и имеет яркие заслуги. Мы взываем ко всем работникам искусств: не пренебрегайте ни физикой, ни географией, ни технологией! Ведь мы, ваши зрители, растём! В том числе и под вашим влиянием.

80. Июльский дождь

А

Даже летом, отправляясь в вояж, бери с собой что-либо тёплое, ибо можешь ли ты знать, что случится в атмосфере?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 39*а*

Дождь кончился. Уже полчаса над лесом жарко сияет Солнце, и там, куда попадают его лучи, трава просохла. Но в жару хочется прилечь на траву в тени. Как найти такую тень, в которой вы можете смело ложиться, не боясь промокнуть?

Б

Надо найти такую тень, которая не была тенью последние полчаса.

В

Очевидно, если Солнце смещается к западу, то тень всякого предмета смещается к востоку. Следовательно, восточный край тени только что не был тенью. Там и следует вам расположиться. Но хватит ли места? Это зависит от скорости, с которой выбранная вами тень перемещается по земле. Тень макушки двухметрового куста перемещается медленно, двадцатиметрового дерева – в десять раз быстрее. За полчаса тень макушки дерева сместилась на 3-4 м. Значит, 1-2 м на восточном краю тени освещались Солнцем не менее двадцати минут и успели просохнуть. Этих метров вам хватит для отдыха. Только, прежде чем прилечь, советуем проверить, не падали ли в это место тени других деревьев в последние полчаса. Для этого, став так, чтобы тень вашей головы падала туда, куда вы намереваетесь лечь, посмотрите на Солнце (оно заслонено макушкой выбранного вами дерева) и убедитесь, что влево от Солнца на протяжении семи или более градусов небо свободно от силуэтов деревьев (именно там Солнце находилось последние полчаса).

И, наконец, потрогайте всё-таки траву рукой: автор не хочет нести ответственности за качество работы, выполненной другим.

81. Тайны оконного стекла

А

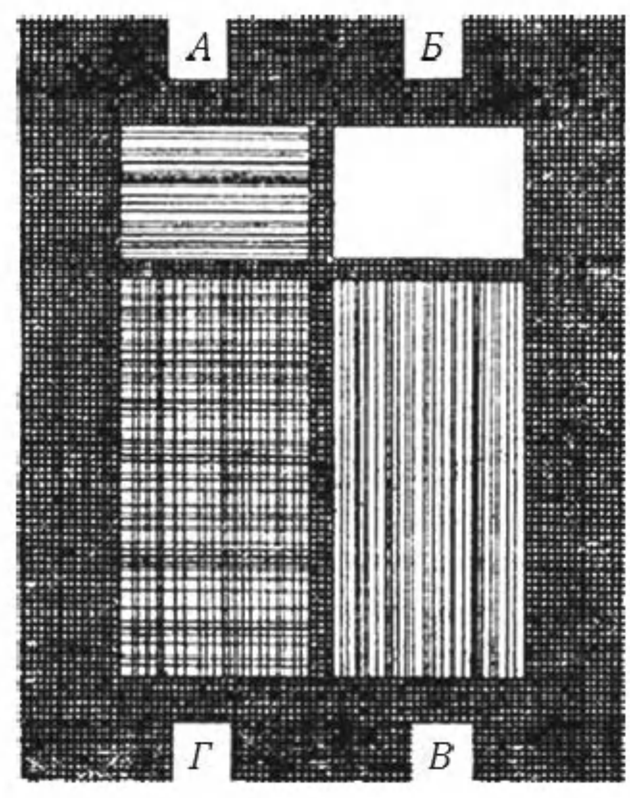


Рис. 111

Когда вы, выключив свет, привыкнете к темноте, взгляните на световой прямоугольник на белой стене, созданный уличным фонарём, светящим вам в окно. Вы увидите в этом прямоугольнике странные вещи: каждое из стёкол создает красивый полосатый узор.

На рис. 111 показан образец такого узора. Посмотрите на стекло: оно кажется чистым и однородным и на взгляд, и на ощупь. Откуда же берётся этот узор?

Б

Возьмите лист белой бумаги и расположите его параллельно стеклу в 10-20 см от последнего. Никаких узоров на бумаге вы не обнаружите. Отодвигайте теперь бумагу от окна. Узор будет проявляться, причём контрастность его будет увеличиваться.

Второй эксперимент. Станьте у стены, в падающем на неё световом потоке, закройте один глаз и, глядя на фонарь, перемещайтесь поперёк полос (если вы попали в прямоугольник *В*, перемещайтесь в горизонтальном направлении, в *А* – в вертикальном).

В

Разум показывает человеку не токмо внешний вид, красоту и доброту каждого предмета, но и снабдевает его действительным оного употреблением.

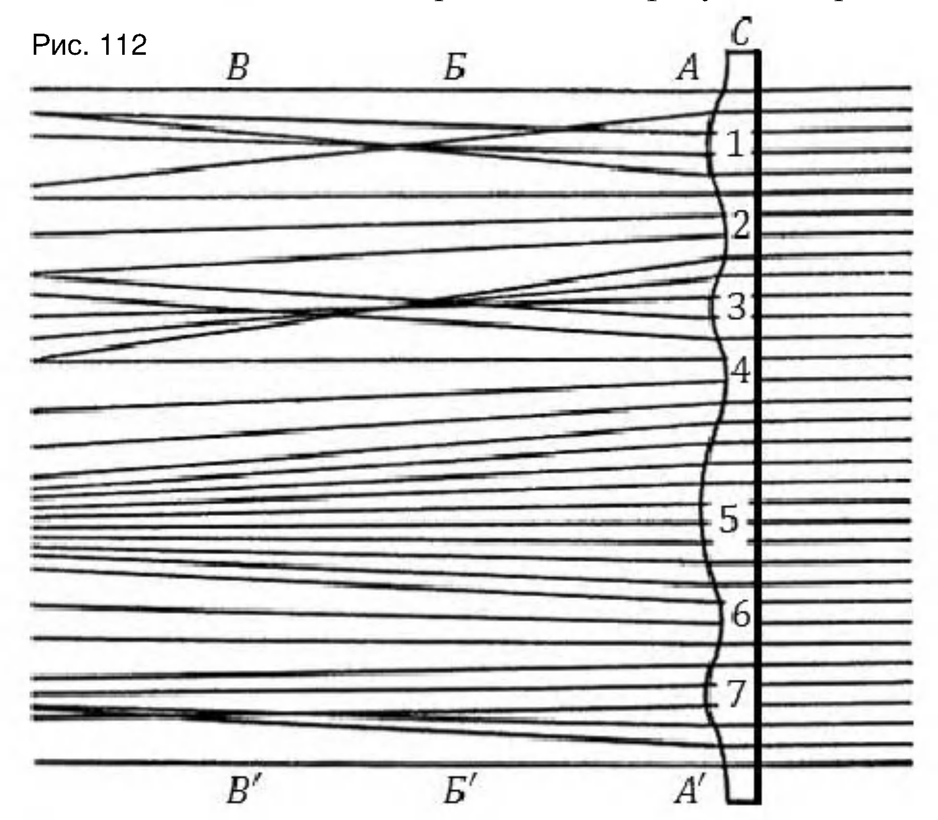
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 89*а*

Во втором эксперименте, перемещаясь, вы увидите, что уличный фонарь мерцает: то вспыхивает, то ослабевает. Кроме того, он не остаётся на месте, а беспорядочно смещается (вправо-влево в прямоугольнике *В*, вверх-вниз в прямоугольнике *А*). Это означает, что угол преломления в стекле беспорядочно меняется от точки к точке. Видимо, толщина стекла непостоянна. И хотя изменения толщины не обнаруживаются непосредственно (лист стекла всегда нам кажется образцовой плоскостью), они легко проявляют себя косвенно: малая кривизна неровности не лишает её свойств линзы, а только делает эту линзу очень длиннофокусной.

На рис. 112 показан разрез оконного стекла *С*. Левая поверхность его показана неровной (неровности сильно преувеличены). Правая поверхность изображена плоской только для простоты построения хода лучей. Качественно картина от этого не изменилась. Мы видим, что такое стекло можно считать состоящим из чередующих-

ся плоско-выпуклых (1, 3, 5, 7) и плоско-вогнутых (2, 4, 6) линз с различной кривизной поверхности и, следовательно, с различными фокусными расстояниями.

Рис. 112



Лист бумаги в эксперименте располагался настолько близко к стеклу (плоскость AA'), что ни одна из линз ещё не успела заметно сконцентрировать или рассеять лучи. Поэтому освещённость листа была практически ровной. Однако отодвинув лист в плоскость $ББ'$, мы уже получили бы яркие полосы от линз 1 и 3, окружённые более тёмными от линз 2 и 4, и не очень яркую – от 7 (ещё не сфокусировавшей свои лучи). В плоскости BB' были бы яркие полосы от линз 3 и 7, тёмные – от 2, 4 и 6 и не очень яркая от 1 (уже перефокусировавшей свои лучи). Таким образом, с увеличением расстояния до экрана состав полос в изображении меняется случайным образом.

А почему мы видим полосы, а не пятна? Если неровности стекла случайны поперёк листа, то почему они не случайны вдоль него? Потому что обычно строительное листовое стекло получают путём проката (или протяжки). При этом каждая неровность прокатных валков оставляет «борозду» на всём протяжении листа. Поэтому «линзы», из которых состоит оконное стекло, являются цилиндрическими и фокусируют только в одной плоскости.

Борозды в стекле *А* (рис. 111), в отличие от *В*, горизонтальны. Это стекло было вырезано из листа иначе, с поворотом на 90°. Стекло *Г* не клетчатое. Просто окно двойное, и два стекла *Г* вырезаны случайно так, что их борозды оказались взаимно перпендикулярными, в то время как у двух стёкол *В* – параллельными. Ну, а стекло *Б*? Почему оно не дало полос? Возможно, оно высшего класса и его неровности столь малы, что стену вашей комнаты нужно отодвинуть в десять раз дальше, чтобы полосы проявились. Но скорее всего это просто открытая форточка.

Итак, ничтожно малые неровности стекла, заметные только для очень точных мерительных инструментов, обнаруживаются отчётливо на экране без всяких инструментов. Это явление так и напрашивается, чтобы использовать его в качестве тон-

кого метода в научных экспериментах. И оно используется – в аэродинамике, акустике, физике атмосферы и других науках. Обтекание воздухом моделей самолёта приводит к местным уплотнениям и разрежениям воздуха. Показатель преломления сжатого воздуха выше, чем разрежённого. Воздух оказывается состоящим из собирающих и рассеивающих линз; просвечивая его, мы получаем на экране картину обтекания.

Аналогично исследуются явления конвекции в жидкостях и газах, звуковые и тепловые волны и т.д. Подробно прочесть об этом можно в книге: *Холдер Д., Норт Р.* Теневые методы в аэродинамике. – М.: Мир, 1966.

82. Провод и капля росы

А

Когда вы смотрите на окружающую местность двумя глазами, вы легко ощущаете глубину перспективы. Например, глядя на стоящий в 10-15 м от вас куст, вы отчётливо чувствуете, какой листок ближе к вам, какой дальше и насколько, – и всё это благодаря известному стереоскопическому эффекту.

Но вот над этим же кустом вы видите несколько горизонтальных проводов линии электропередачи. Попытайтесь определить, какой из проводов дальше, какой ближе. Это вам не удастся. Все ваши попытки приведут только к усталости в глазах. Посмотрите на куст: ваши глаза по-прежнему обнаруживают разницу в расстояниях. В чём дело? Почему глаза отказываются обнаруживать эту разницу по проводам?

Б

Рис. 113

Приведём дополнительные наблюдения, которые помогут вам найти ответ. Первое: если склонить голову набок, то вы отлично обнаружите разницу в расстояниях. Второе: если вы с горизонтального участка проводов, находящегося на середине пути между двумя опорами, будете переводить взгляд на участки, более близкие к опоре (эти участки наклонны из-за провисания провода), то стереоскопичность вашего зрения начинает восстанавливаться. Третье: по вертикальной нити (или столбу) глаза работают безукоризненно. Наконец, и по горизонтальному, проводу, если на нём висит сверкающая капля росы или сидит птица, глаза работать не отказываются.

Напомним на всякий случай основное условие стереоэффекта: он основан на зрении двумя глазами, разнесёнными на некоторое расстояние. Расстояние A_1A_2 между центрами глаз называют стереоскопическим базисом (рис. 113). Чем ближе предмет B, тем больше угол α, под которым виден базис из точки B, тем сильнее разница в повороте двух глаз. Эту разницу мозг преобразует в ощущение расстояния.

В

Представьте, что в вашем поле зрения есть вертикальная нить B (рис. 113), но вы смотрите мимо неё вдаль, рассматривая очень далёкий предмет C. Тогда óси обоих глаз A_1C_1 и A_2C_2 практически параллельны, а нить B

видна левому глазу A_1 на угол $\frac{\alpha}{2}$ правее предмета C, правому глазу A_2 – на такой же же угол левее.

Иными словами, наблюдая далёкий предмет C, мы видим близкую нить B раздвоенной (рис. 114*а*), причём угол между двумя изображениями нити равен $2\frac{\alpha}{2} = \alpha$.

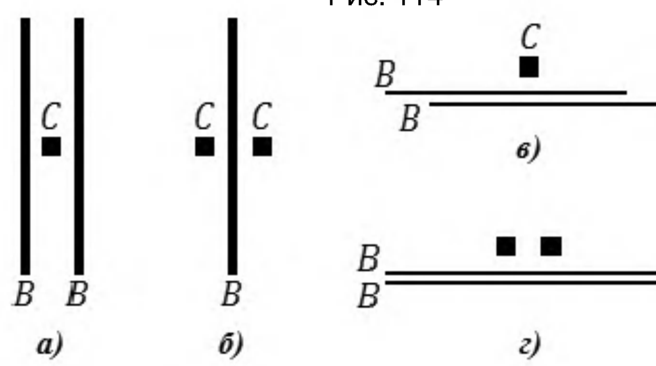


Рис. 114

Переведём взгляд на нить. Оба её изображения сольются в одно, оба глаза повернутся на угол $\frac{\alpha}{2}$ *в разные стороны*, что и зафиксируется мозгом в виде сведений, что нить B ближе предмета C. Изображение предмета C при этом раздвоится (рис. 114*б*).

Теперь представим, что мы смотрим на отдалённый предмет C мимо горизонтальной нити. Нить опять раздвоится вправо-влево (рис. 114*в*), но теперь два изображения, несмотря на раздвоение, совпадают друг с другом по всей длине, за исключением концов (на рисунке два изображения нити слегка сдвинуты по высоте по соображениям наглядности). Переведём взгляд на нить. Все наши попытки определить расстояние до нити ни к чему не ведут, так как при любом угле α два изображения нити по-прежнему налагаются друг на друга (рис. 114*в*, *г*). Стоит, однако, склонить голову набок, как изображение нити теперь раздваивается по высоте, и нам нетрудно свести его воедино и благодаря этому ощутить расстояние.

Таким образом, всё дело в том, что изображение всегда раздваивается в направлении вдоль базиса, и если базис параллелен нити, то нить раздваивается вдоль самой себя, отчего стереоскопический эффект пропадает.

Если, однако, на горизонтальном проводе сидит птица, т.е. имеется «точка», за которую глаза могут «зацепиться», то стереоэффект сохраняется; глаза определяют расстояние до птицы, а мозг подсознательно или на основе логических умозаключений, опирающихся на то, что птица сидит именно на проводе, правильно определяет расстояние и до провода.

83. Взгляд сквозь стену

А

Найдите в окружающей вас обстановке узор из равномерно расположенных мелких одинаковых деталей (на обоях, на скатерти, на занавеске и т.д.). Желательно, чтобы кра́я поля, занятого узором, находились за пределами вашего поля зрения. Расстояние между отдельными деталями узора должно быть не более 5 см. Теперь, приблизившись к нему на расстояние 20÷100 см, попробуйте посмотреть сквозь узор в глубину, сосредоточивая свой взгляд на всё большей и большей глубине. Сделать это не каждому удаётся с первой попытки, но не теряйте надежды приобрести этот навык. Вы не раз делали это непроизвольно раньше; вспомните выражение: «он смотрит сквозь предмет, не видя его».

Так вот, когда вам удастся это сделать, то вы обнаружите необычные вещи: вместо первого, вполне реального, узора вы увидите в глубине точно такой же второй, но заметно более крупных размеров. При этом первый, реальный, узор исчезнет, а там, где он находился, вы увидите что-то вроде стеклянной стены. Если вам повезёт, то за вторым узором ещё глубже вы увидите третий, тоже кажущийся, ещё более крупный узор. А теперь попробуйте объяснить это несколько странное явление.

Б

Тем, у кого опыт уже получился, советуем, не сводя глаз с кажущегося изображения, приближаться к узору и удаляться от него. Вы увидите, что, помимо естественного приближения и удаления реального узора, имеет место необычно большое приближение и удаление ложных узоров, тем большее, чем более глубокий узор вы видите. Если вы будете двигаться влево, то узор будет двигаться вправо со скоростью, заметно большей, чем ваша. Если вы начнёте медленно наклонять голову набок, то узор начинает раздваиваться и пропадать, но с возвратом головы в первоначальное положение восстанавливается.

Если у вас в комнате нет подходящего узора или увидеть ложный узор не удаётся, то проделайте следующий опыт. Нанесите на внешнем стекле двойного окна чернильную точку, а на внутреннем – горизонтальный ряд точек с интервалами 3 см (несколько выше уровня глаз, чтобы все точки проектировались на небо). Отойдя от внутреннего стекла на расстояние, приблизительно равное расстоянию между стёклами, сосредоточьте взгляд на одинокой точке внешнего стекла (это и будет именно то, о чём мы вас просили: взгляд сквозь «стену», роль которой сейчас играет ближнее к вам стекло). При этом точки внутреннего стекла будут казаться раздвоенными. Не сводя взгляда с точки внешнего стекла, осторожно приближайтесь (удаляйтесь), пока раздвоенные точки не сольются попарно. Теперь вам будет казаться, что точки внутреннего стекла находятся в плоскости внешнего. Ложный узор обнаружен. Сосредоточьтесь на нём; отходя от окна, вы увидите, что узор отодвигается из плоскости стекла наружу, в небо.

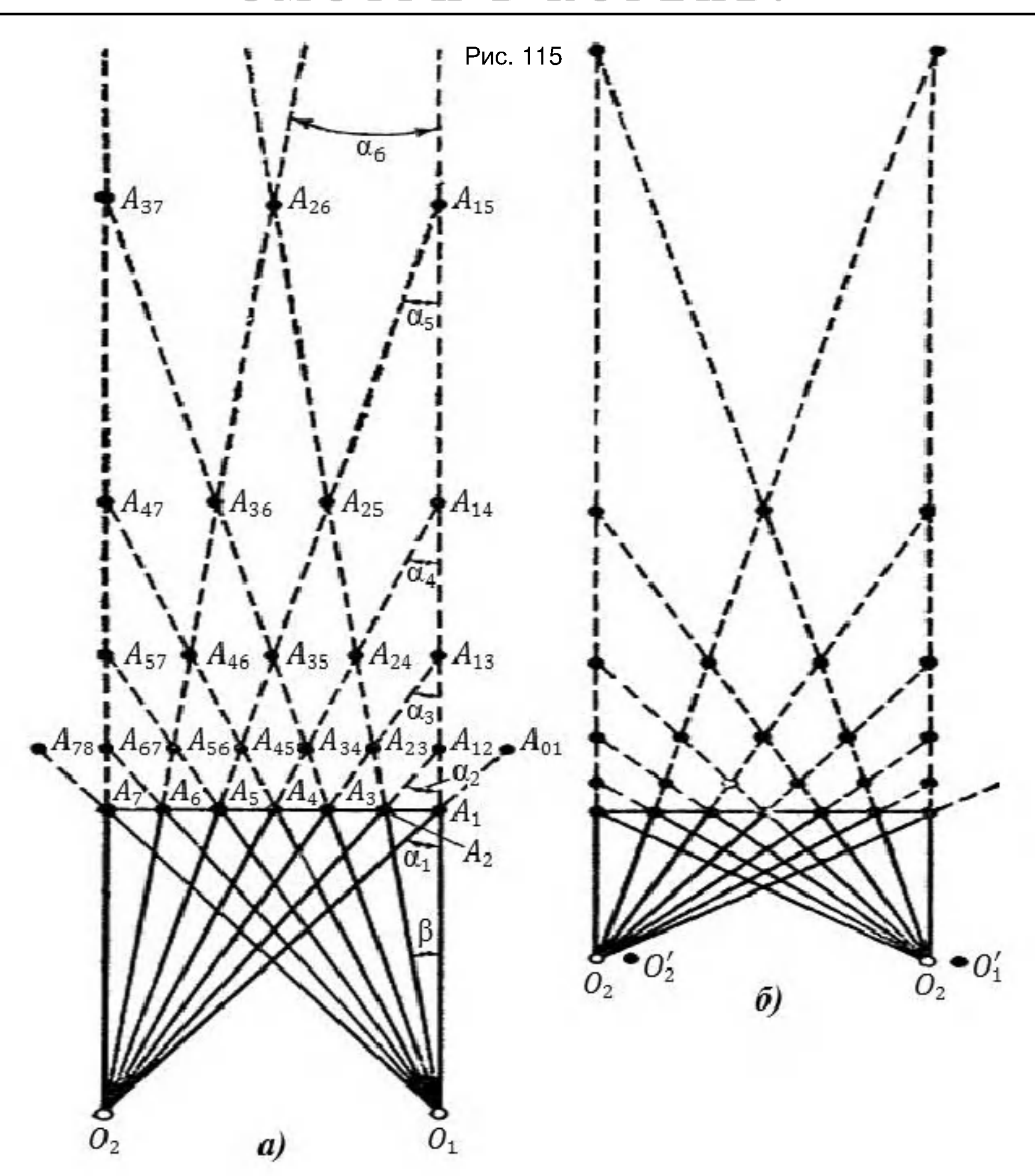
Тем же, у кого опыт не получился, мы можем помочь только разрешением прочесть ответ.

Внимательно разобравшись в природе этого явления, повторите опыт: возможно, раньше вы выбрали неудачный узор.

В

Природа этого явления поясняется на рис. 115. Пусть, расстояние между центрами зрачков ваших глаз O_1O_2 равняется 6 см, а расстояние между деталями узора A_1, A_2, ..., A_7 равно 1 см. Сосредоточивая взгляд на детали узора A_1, вы направляете на неё оптические оси обоих глаз так, что они вынуждены пересекаться под углом α_1. Этот угол велик, и это заставляет мышцы, поворачивающие глазные яблоки, сильно напрягаться, а это даёт нашему мозгу основание считать, что предмет A_1 близок (см. также предыдущую задачу).

Представим теперь, что оптическая ось одного глаза направлена на деталь A_1, а другого – на A_2. Это именно то, о чём мы просили вас в начале задачи: направив так глаза, вы перевели взор из плоскости A_1A_7 в глубину, в точку A_{12}. Так как детали A_1 и A_2 узора совершенно одинаковы, мозг не заметит ошибки и будет считать изобра-



жения различных деталей A_1 и A_2 на сетчатке разных глаз изображением одной детали A_{12}, на самом деле не существующей. Поскольку глаза теперь развёрнуты на угол $\alpha_2 < \alpha_1$, то мозг решит, что деталь A_{12} находится на большем расстоянии, чем деталь A_1 или A_2:

$$O_1A_{12} > O_1A_1 , \quad O_2A_{12} > O_2A_1 .$$

Если, таким образом, глазá настроились на нужную глубину, то изображения деталей A_2 и A_3 будут сведены в сознании в изображение детали A_{23}, деталей A_3 и A_4 – в A_{34} и т.д. Создаётся впечатление, что в плоскости $A_{12}A_{67}$ существует такой же узор, что и в плоскости A_1A_7.

Заметим, что обязательным условием вашего успеха является параллельность прямых O_1O_2 (базис глаз) и A_1A_2 (прямая, соединяющая два смежных элемента). Иначе глаза не смогут свести два элемента в один: для этого одному из них нужно было бы подняться на лоб, а второму – спуститься на щёку. Вот почему наклон головы набок приводит к раздвоению деталей ложного узора по высоте и пропаданию эффекта.

Из рисунка видно, что деталь A_{01} будет видна только одним глазом O_2, так как в первоначальном узоре нет детали A_0, нужной для глаза O_1. Значит, деталь A_{01} (как и деталь A_{78}) не даёт стереоэффекта, и это будет сильно затруднять наблюдение всей картины. Этого не произойдёт, если узор A_1A_7 простирается в обе стороны безгранично (или по крайней мере за пределы поля зрения), что и имеет место в случае обоев, разглядываемых с небольшого расстояния.

Согласно рисунку, детали ложного узора должны казаться крупнее деталей реального узора, $A_{12}A_{23} > A_1A_2$. И в самом деле, они выглядят крупнее.

Но почему? На сетчатке глаза интервал $A_{12}A_{23}$ занимает такое же место, какое занимает интервал A_1A_2, т.е. угловые размеры β деталей ложного узора такие же, как и реального. Ведь на самом деле перед глазами имеются всё те же детали реального узора и ничего больше! Почему же они теперь кажутся бо́льшими? Да всё потому, что ложный узор воспринимается как находящийся на большем расстоянии. Один оптический обман влечёт за собой другой. Мозг, наученный многолетней практикой, делает естественный вывод, что из двух предметов, имеющих одинаковые угловые размеры, более далёкий обладает бо́льшими линейными размерами.

Из рис. 115*а* видно, что второй ложный узор, ещё более глубокий и крупный, получается тогда, когда глаза повёрнуты на угол α_3 и в мозгу накладываются впечатления от деталей A_1 и A_3, A_2 и A_4, ..., смещённых друг относительно друга на два интервала. Аналогично можно наблюдать третий, четвёртый и пятый ложные узоры. Шестой ложный узор в случае, показанном на рисунке, соответствует $\alpha_7 = 0$, т.е. параллельности оптических осей. Этот узор находится бесконечно далеко.

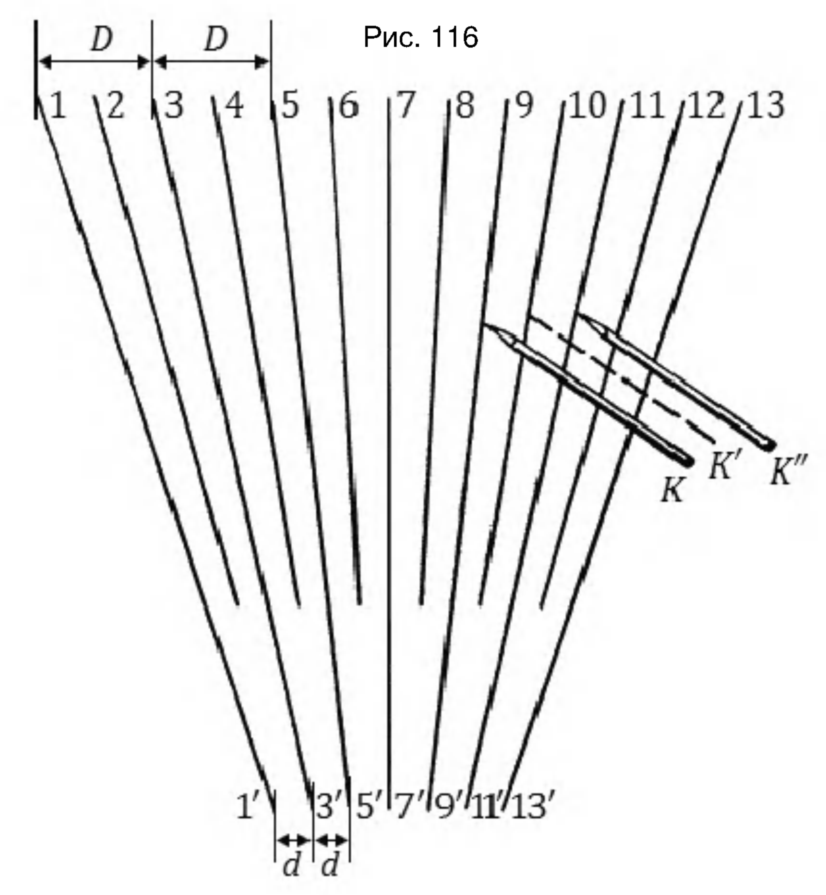
Рассмотрим поведение ложных узоров при перемещении глаз. Рис. 115*б* показывает, что если приблизиться к реальному узору, то все ложные узоры также пропорционально приблизятся к нему. Если переместить голову параллельно реальному узору на один элемент (точки O_1' и O_2'), то реальный, а следовательно, и все ложные узоры сместятся в обратную сторону также на один элемент. Поскольку, однако, у более далёких ложных узоров кажущийся размер элемента значительно больше, то и соответствующее перемещение будет больше.

Несколько слов о «стеклянной стене», которая остаётся на месте реального узора при рассматривании ложного. На всяком узоре имеются отдельные неправильности, ворсинки, пылинки, которые, в отличие от самого узора, расположены неравномерно, случайно и поэтому не находят себе пары в ложном узоре (ср. с задачей «Порядок среди беспорядка»). Поэтому они не попадают в плоскость ложного узора. Они видны так, как видны пылинки на поверхности зеркала, когда человек рассматривает своё изображение в глубине зеркала.

Удалось ли вам увидеть второй ложный узор? Если нет, то в помощь вам предлагается рис. 116. Начертите на внутреннем стекле окна́ веер прямых, взяв расстояние между прямыми внизу $d = 3$ см и вверху $D = 6$ см (прямые $11'$, $33'$, ...). Кроме того, начертите промежуточные прямые 2, 4, 6, ..., не доводя их до самого низа. Настроившись по нижним концам линий $1'$, $3'$, $5'$, ... (с помощью точки внешнего стекла) на первый ложный узор, можно использовать прямые $1'1$, $3'3$, $5'5$, ... как направляющие для перевода взгляда на верхнее поле, где этот ложный узор оказывается вторым благодаря наличию промежуточных прямых 2, 4, 6, ...

Если к какой-либо из линий прикоснуться карандашом K, то он будет казаться раздвоенным (K и K''), причём он будет указывать на линии, отстоящие на два ин-

Рис. 116



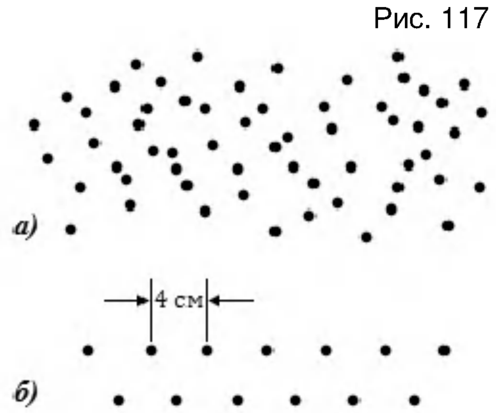
тервала, а это и доказывает, что мы видим второй, а не первый ложный узор. Объект будет казаться наклонной плоскостью, верхним концом уходящей в небо.

При расслаблении глазных мышц зрение, непроизвольно возвращаясь от второго ложного узора к реальному, попутно обнаруживает и первый ложный, при котором K и K' (пунктир) отстоят на один интервал. Это будет тоже наклонная плоскость, но более близкая к истинной, вертикальной. Наблюдая за первым ложным узором, вы уже не сумеете по направляющим скользнуть взглядом до нижнего края: как только кончатся прямые 2, 4, 6, ..., эффект пропадёт.

В повседневной жизни аккомодация глаз (область чёткой фокусировки) автоматически следует за конвергенцией (областью пересечения) их оптических осей, поэтому реальный узор виден хорошо сфокусированным независимо от расстояния до него. Поэтому же ложный узор виден размытым тем больше, чем больше его номер. Необходимо заметное усилие, чтобы разорвать связь между аккомодацией и конвергенцией и увидеть ложный узор хорошо фокусированным.

Несомненно, ложные узоры могут привести к некоторым вредным последствиям в производственной обстановке, что следует учитывать при проектировании устройств с периодической структурой. Избежать этого эффекта можно разумным сочетанием нескольких цветов, нарушением периодичности с помощью дополнительных штрихов и т.д. С другой стороны, этот эффект можно использовать для выявления периодических структур на фоне случайных помех. Так, например, рассматривая рис. 117*а* взглядом, устремлённым под бумагу, после нескольких неудачных попыток можно обнаружить в

Рис. 117



глубине плоский периодический узор (рис. 117*б*), чётко отделяющийся от остальных точек, рассеянных по глубине случайным образом (для этого нужно рис. 117*а* перечертить в масштабе, указанном на рис. 117*б*[1]).

Интересно, что с помощью расходящихся направляющих можно обнаружить ложные узоры, находящиеся «на бесконечности» (оптические óси глаз параллельны) и даже «дальше бесконечности». В последнем случае оси пересекаются сзади наблюдателя, т.е. левый глаз будет повернут влево, а правый – вправо! Для этого надо продолжить расходящиеся прямые 1, 3, 5, ... вверх, пока расстояние между ними D не станет больше базы ваших глаз D_0 (прямые 2, 4, 6, ... при этом не нужны).

Автору удалось добраться взглядом до $D = 10$ см при базе глаз $D_0 = 6{,}7$ см и расстоянии от узора $R = 50$ см. Это значит, что его глаза в это время смотрели в разные стороны под углом

$$\alpha \approx \frac{D - D_0}{R} = \frac{10 - 6{,}7}{50} = \frac{3{,}3}{50}\ \text{рад} \approx 4^\circ .$$

Достижение кажется не очень крупным. И достается оно дорогой ценой: целый день потом болят глаза, при одном воспоминании об эксперименте из глаз катятся слёзы, и только спустя неделю набираешься смелости рискнуть повторить опыт. Наука требует жертв! Но жертвы уже принесены, и поэтому вам нет никакой надобности приносить дополнительные. Во всяком случае, я настоятельно советую не делать этого.

Эти опыты автор описал в журнале «Природа», 1966, № 1. А затем с удивлением обнаружил противоположное утверждение (см.: Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1965, вып. 3, с. 182):

«…Совершенно *невозможно* сознательно или несознательно одновременно повернуть оба глаза в *разные стороны*, и вовсе не потому, что нет мышц, способных сделать это, а потому, что *нет способа послать такие сигналы*, чтобы оба глаза отвернулись в разные стороны… И хотя мышцы одного глаза вполне могут поворачивать его как угодно, даже йоги никаким усилием воли не могут повернуть *оба* глаза в разные стороны. Просто потому, что нет никакой возможности сделать это. В какой-то мере мы уже скованы от рождения. Это очень важный пункт, ибо большинство прежних книг по анатомии и психологии не признавало или не замечало того факта, что мы в такой степени скованы с самого рождения; они утверждали, что можно всему научиться».

Как видите, утверждение решительное и, кроме того, из него делаются далеко идущие выводы. Можно согласиться, что человек ограничен, что не всему он может научиться. Но пример, из которого делается этот вывод, следует признать неудачным. Автор горд, что ему удалось превзойти йогов, правда, не за счёт «усилия воли», а за счёт того, что *есть «способ послать такие сигналы»*.

Если из этого вы сделаете вывод, что «Фейнмановские лекции по физике» не стоит читать, то вы очень ошибётесь. Эта блестящая книга, написанная лучшими педагогами, наполнена множеством интересных фактов, о которых вы не прочтёте нигде в другом месте. Это одна из первых попыток нового, более современного, изложения физики, книга, подающая материал в оригинальной последовательности, яр-

[1] Другой, предельно простой способ увидеть узор рис. 117*б* в рис. 117*а*: расположите лист так, чтобы глаз был на продолжении пунктирных прямых, содержащихся в узоре рис. 117*а*.

ко, интересно, живым разговорным языком. Она стимулировала появление других попыток пересмотра методики преподавания физики. Но любую книгу читать следует критически, в том числе и ту, которую вы в данную минуту держите в руках.

84. С неба звёздочку достану

А

Хотите достать звезду с неба? Не хотите… Жаль! Ну, а хотя бы потрогать её руками? Тоже нет… Думаете, дядя шутит. А между тем это так просто, если вы поняли две предыдущие задачи. Разумеется, если говорить серьёзно, то потрогать можно не настоящую звезду, а иллюзорную, созданную за счёт стереоэффекта нашего зрения. Нужно создать иллюзию, что звезда находится на расстоянии меньше вытянутой руки. И тогда вы сможете не только дотянуться до звезды, но даже пошарить рукой в зазвёздном пространстве.

Б

Звёзды очень далеки. Для нашей задачи, рассматривающей стереоэффект, они бесконечно далеки: лучи, соединяющие звезду с каждым из ваших глаз, в высшей степени параллельны.

Чтобы звезда казалась близкой, нужно, чтобы óси глаз, направленных на неё, пересекались под некоторым углом. Звезда будет тем ближе, чем больше этот угол. Так, если база ваших глаз 65 мм и вы хотите увидеть звезду на расстоянии 650 мм, то угол должен быть равен

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{65}{650} \approx 0{,}1 \text{ рад} \approx 5{,}7° .$$

Такую иллюзорную «звезду» *можно синтезировать из двух реальных*, угловое расстояние между которыми на небесной сфере равно 5,7°.

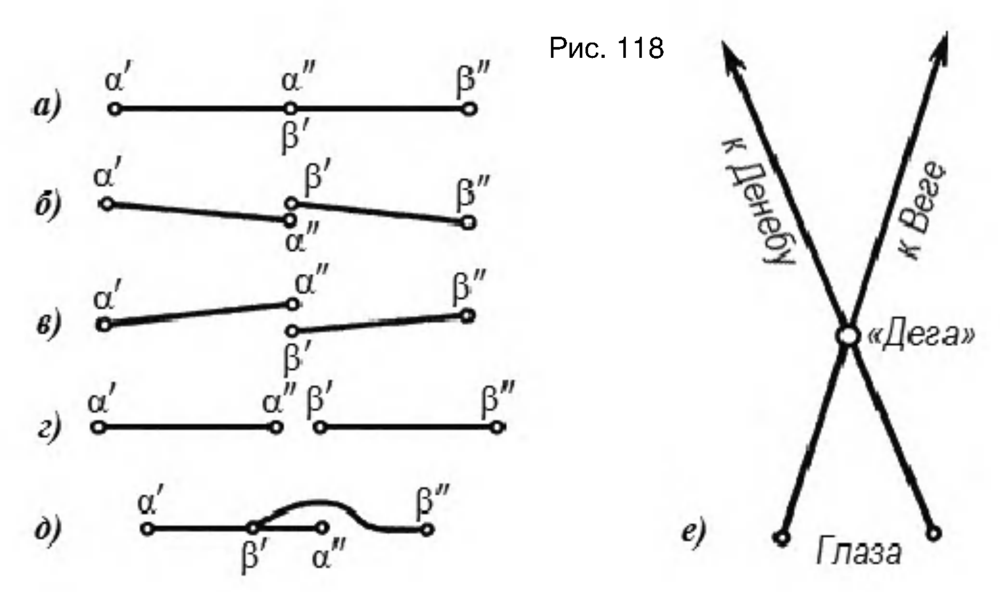
Продумайте методику эксперимента и попробуйте добиться успеха. Подскажем: в качестве «оптического прибора» вам очень поможет остриё карандаша, который вы держите в вытянутой руке.

В

Прежде всего, этот эксперимент, в отличие от описанного в конце предыдущей задачи, не утомляет зрения, так как в нём глаза должны не отворачиваться друг от друга, а поворачиваться навстречу друг другу, что является естественным движением глаз при рассматривании близких предметов в обыденной жизни.

Выберем две яркие звезды α и β с угловым расстоянием порядка 5° (желательно одинаковой яркости, причём в ближайшей окрестности не должно быть других ярких звёзд). Повернём голову так, чтобы база глаз была параллельна прямой звезда–звезда (чтобы не утомлялась шея, следует выбрать горизонтально разнесённую пару звёзд). Отодвинем остриё карандаша сантиметров на 70 от глаз, установим его рядом со звёздами и сосредоточимся на нём взглядом. При этом каждая звезда раздвоится вдоль базы.

Если база и прямая $\alpha\beta$ параллельны, то правая половинка левой звезды α'' совпадет с левой половинкой правой β' (рис. 118*а*). Если параллельности нет, то будет



картина, подобная рис. 118*б* или *в*, и тогда голову надо слегка наклонить влево или вправо, до совпадения двух половинок. Если совпадения нет по горизонтали (рис. 118*г* или *д*), то карандаш нужно немного приблизить или отодвинуть. Вы видите, данная задача обратна предыдущей: карандаш выполняет роль чернильной точки на внешнем (сейчас «внутреннем») стекле, две звезды – роль точек на внутреннем (сейчас «внешнем») стекле.

Сосредоточившись *взглядом* на острие карандаша, осторожно переключите *внимание* на «синтезированную» звезду. Вы обнаружите, что она уже не на небе, а висит рядом с карандашом! Причём не дальше него и не ближе. Звезда будет казаться слегка размытой, причины этого описаны в предыдущей задаче. Не спуская глаз с вашей звезды, отодвигайте карандаш – и вы обнаружите, что он окажется далеко по ту сторону звезды. Только не совмещайте карандаш со звездой по направлению: от этого она, естественно, гибнет, и приходится начинать сначала. Впрочем, при некотором навыке можно звезду на секунду-другую разрушить, а отодвинув карандаш, вновь зажечь на том же месте.

Если из-за отсутствия опыта синтез звезды вам не удаётся (не зная точно углового расстояния между звёздами, вы не можете правильно выбрать положение карандаша), предлагаем более детальную технологию настройки. Закройте левый глаз и подведите остриё карандаша под левую звезду. Теперь, не отодвигая карандаша, закройте правый глаз, откройте левый и оцените положение карандаша относительно правой звезды. Если он находится точно под звездой, то всё готово: открывайте оба глаза, сосредоточьтесь на карандаше и наслаждайтесь властью над звёздами. Если же карандаш окажется правее, то отодвиньте его и повторите всю процедуру. Если левее – придвиньте карандаш к себе.

Кстати сказать, описанная методика пригодна для приближённого измерения угловых расстояний между звёздами: добившись совпадения карандаша с обеими звёздами, вы должны измерить расстояние от глаз до карандаша. Разделив длину базы на это расстояние, вы получаете значение искомого угла в радианах.

Удобными парами звёзд для эксперимента (вечером в августе) являются α и γ, γ и δ, γ и ε Лебедя, любая сторона квадрата Пегаса и др. Эффектной парой являются α Лиры (Вега) и α Лебедя (Денеб). Из них получается «звезда», сидящая буквально на носу у наблюдателя – в 15 см от глаз (звезда Дега на рис. 118*е*). Однако здесь приходится изрядно перекосить глаза: óси глаз должны пересекаться под углом порядка

25°. В принципе можно получить угол ещё больше, но не стоит: зрение нужно беречь.

А говорят: они звёзд с неба не хватают! Это не про нас. Мы можем снять с неба всё, кроме Луны и Солнца: у них нет подходящей пары.

85. Секрет красоты

А

Возьмите лоскут какой-нибудь не очень плотной, просвечивающей, без рисунков ткани (ситец, шёлк) и посмотрите на просвет (на фоне неба). Вы увидите мелкую решётку из взаимно перпендикулярных продольных и поперечных нитей, и ничего больше. Сложите теперь этот лоскут вдвое и снова посмотрите на просвет. Если вы ранее не обращали внимания на это зрелище, то вы будете поражены красивым узором из крупных тёмных и светлых полос, плавно и согласованно изогнутых и, что особенно интересно, сильно смещающихся и меняющих форму при самом незначительном смещении одной половины лоскута относительно другой. Откуда взялись эти узоры? В чём секрет этой красоты? Ведь ни та, ни другая половина лоскута не содержит никаких узоров, кроме мелкоструктурной решётки из нитей!

Б

Если вы хотите самостоятельно разобраться в этом явлении, то поставьте следующий опыт. Начертите тушью на двух листах кальки по десятку параллельных полос. Ширину полос и просветов между ними сделайте одинаковой и равной, например, 2 мм. Такую комбинацию полос называют параллельным растром, а расстояние от полосы до полосы (сумма ширины полосы и просвета) – шагом растра. Наложите теперь кальки друг на друга так, чтобы по́лосы одного листа были чуть-чуть не параллельны полосам второго листа. Посмотрите кальки на просвет с большого расстояния, а затем – с малого. Меняйте угол пересечения полос и наблюдайте за поведением узора. Бо́льшая толщина линий позволит вам найти причину появления светлых и тёмных полос узора.

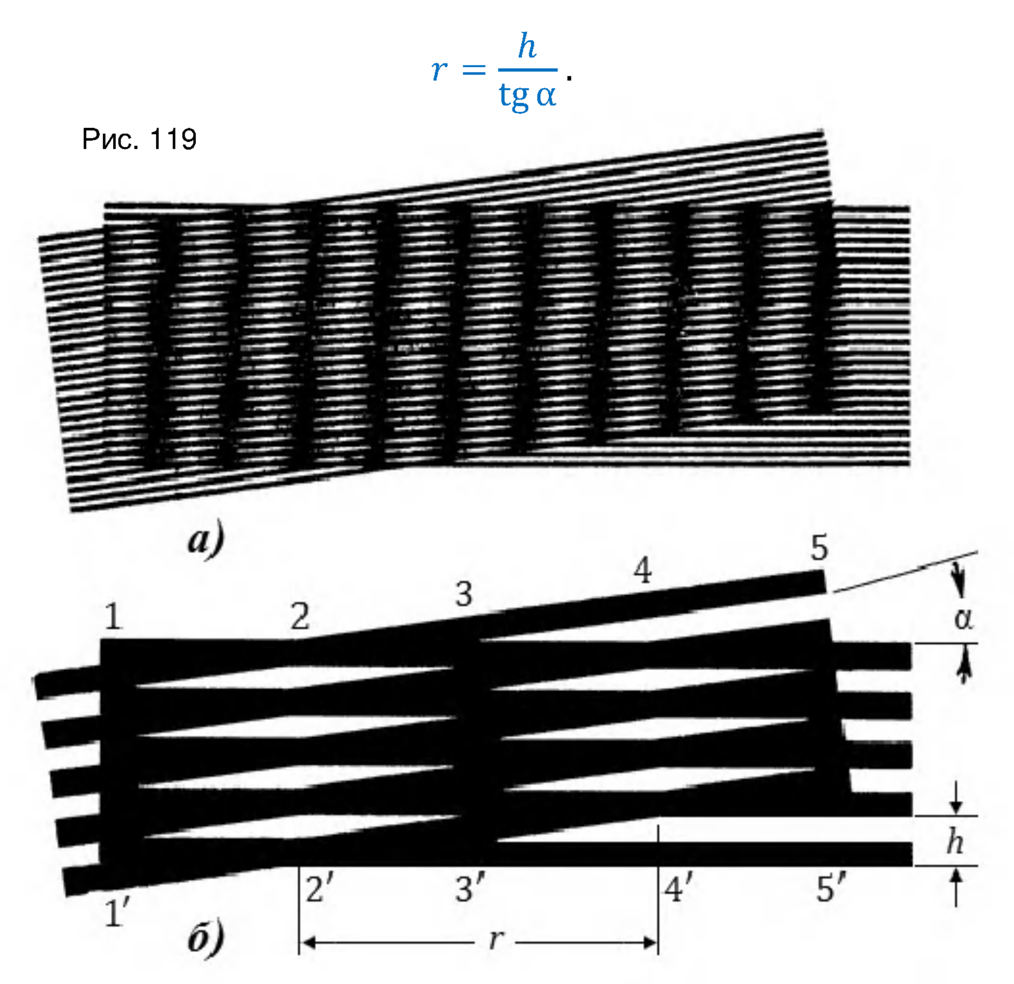
Рекомендуем сделать ещё одну кальку с чуть-чуть большей шириной чёрных и светлых линий (например, 2,2 мм), а также кальку с линиями, слегка расходящимися веером, и, наконец, кальку с концентрическими окружностями.

В

Из рис. 119*а* и *б*, на которых наложены два параллельных растра с одинаковым шагом, видно, что, благодаря небольшой непараллельности, линии разных растров то налагаются друг на друга (направления $22'$ и $44'$ на рис. 119*б*), то попадают друг другу в просветы (направления $11'$, $33'$, $55'$). Там, где линии попадают в просветы, величина просветов, естественно, уменьшается, отчего вдоль соответствующих направлений $11'$, $33'$, $55'$ создаются широкие тёмные полосы узора. Вдоль же направлений $22'$ и $44'$ и т.д. создаются, наоборот, светлые полосы узора. В простейшем случае, когда оба растра одинаковы, т.е. обладают одинаковым шагом h, и когда угол наклона между обоими растрами α очень мал, расстояние между светлыми полосами узора $22'$ и $44'$ равно

$$r = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Рис. 119

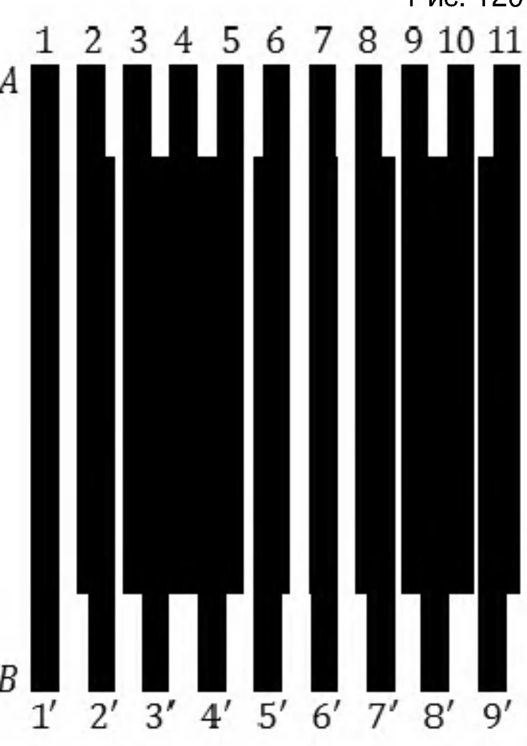


Следовательно, при малых углах α расстояние между полосами узора r намного превосходит шаг растра h. Так, например, для $\alpha = 5°$ имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}0875, \quad r = \frac{h}{0{,}0875} \approx 11{,}5\,h.$$

По этой же причине по́лосы узора сдвигаются намного сильнее, чем линии растров. Так, например, при сдвиге наклонного растра вверх на h полосы узора сдвигаются влево на r, т.е. в 11,5 раза больше.

Рис. 120



Явление возникновения узоров при наложении двух близких по наклону или шагу растров называют муар-эффектом, а сам узор – муаром.

Рассмотрим второй случай муар-эффекта, когда два растра налагаются друг на друга параллельно, но шаг растров неодинаков. На рис. 120 показаны растр A (линии 1, 2, 3, ...) с толщиной линий и просветов по 2 мм (т.е. шаг $h = 4$ мм) и растр B ($1'$, $2'$, $3'$, ...) с шагом $h' = 4{,}8$ мм. При параллельном наложении линии растров с неравным шагом то совпадают ($11'$, $76'$), то попадают друг другу в просвет ($33'4$, $98'10$), отчего и здесь возникают широкие тёмные и светлые полосы узора. Если первое совпадение произошло для линий 1 и $1'$, то следующее совпадение произойдёт

там, где оба растра разойдутся ровно на один шаг, т.е. там, где

$$(n+1)h = nh'.$$

Решая это уравнение относительно n, имеем

$$n = \frac{h}{h'-h}.$$

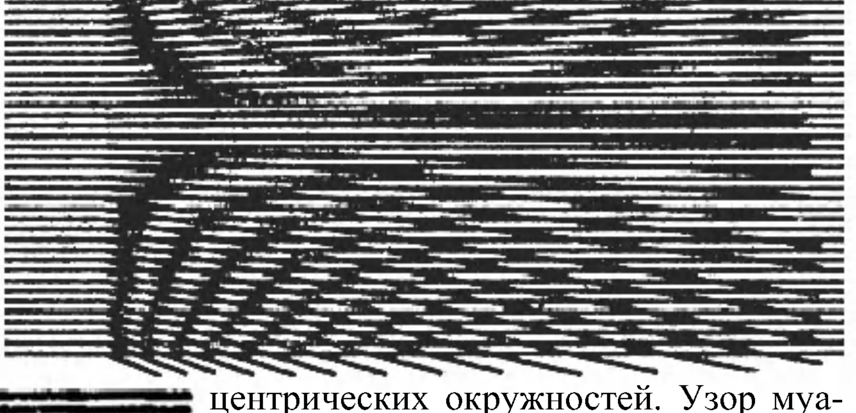
В нашем примере $h = 4$ мм и $h' = 4{,}8$ мм, т.е.

$$n = \frac{4}{4{,}8-4} = \frac{4}{0{,}8} = 5.$$

Таким образом, следующее совпадение произойдёт через $n+1=6$ шагов растра A, или через $n=5$ шагов растра B (совпадение линий 7 и $6'$). При незначительном сдвиге растра B на один шаг h' происходит большое перемещение в обратную сторону широких полос узора на $nh' = 5h'$.

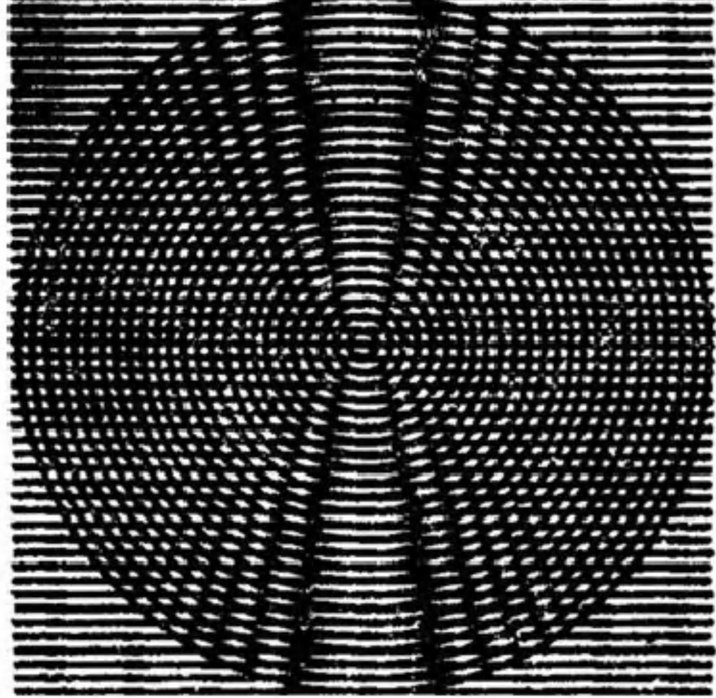
Если на параллельный растр накладывается слегка расходящийся, то картина муара оказывается весьма своеобразной (рис. 121): светлые и тёмные полосы муара красиво изгибаются, малейший поворот или сдвиг одного растра относительно другого приводит к большим изменениям узора. Узор «оживает», «переливается», «играет».

Рис. 121



На рис. 122 на параллельный растр наложена серия концентрических окружностей. Узор муара отсутствует там, где окружности перпендикулярны к прямым (слева и справа), и отчётливо виден в тех областях, где окружности параллельны или почти параллельны прямым (вверху и внизу).

Рис. 122



В случае наложения двух кусков одной и той же ткани, очевидно, имеют место все описанные выше эффекты: нити одного куска слегка непараллельны нитям другого; один кусок несколько больше растянут, чем другой, отчего шаги нитей в кусках неодинаковы; возможны веерообразные искажения растра нитей и т.д. Всё это приводит к очень сложной игре узоров муара.

Интересно отметить, что если вы наложите два куска различных тканей с сильно различающимся шагом, то узор муара будет почти незаметен или же его полосы будут очень мелкими. Это следует и из приведённой выше формулы. Наоборот, чем меньше отличаются два растра по шагу, тем крупнее полосы узора. При точном сов-

падении шага двух растров ширина тёмной или светлой полосы становится бесконечно большой: либо все линии обоих растров строго совпадают, что соответствует светлой полосе; либо все линии одного растра попадают в просветы другого («переплетение» растров) – это даёт потемнение на всём протяжении растра. Этот эффект можно с успехом использовать (и его используют) для проверки качества изготовления различных растров (наложение изготовленного растра на эталонный позволяет по картине муара быстро определить степень их одинаковости).

Явление муара используется, конечно, и в текстильной промышленности – для создания «переливов» в тканях. Это же явление довольно часто встречается и в окружающей нас обстановке. Вот пример: вы из окна поезда видите на холме огороженный забором участок земли, причём для вас передний и задний заборы совпадают на фоне неба. Поскольку доски ближайшего забора видны вам под бо́льшим углом зрения, чем дальнего, то наблюдаемая вами картина совпадает с картиной рис. 120, передний забор соответствует растру *B* с более крупным шагом. В результате неравенства видимых (угловых) размеров шага обоих заборов вы видите в картине забора широкие светлые и тёмные полосы, быстро бегущие в ту сторону, куда идёт ваш поезд. Другой пример муара – узор, создаваемый на экране телевизора параллельным растром строк и расходящимся растром чёрных линий испытательной таблицы, передаваемой для проверки качества регулировки телевизора.

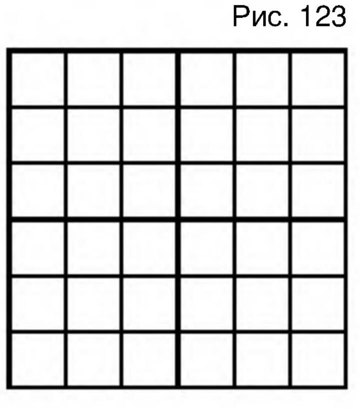
Наконец, вернитесь к задаче с двумя будильниками. Неравенство их хода тождественно неравенству шага двух параллельных растров. В результате удары будильников то совпадают, то расходятся, чтобы снова совпасть, когда один «временно́й растр» опередит другой ровно на один шаг. Это тот же муар, только уже не в пространстве, а во времени. Оба они подчиняются одним и тем же закономерностям.

86. Разглядывая сквозь щель

А

В этой задаче вам предстоит объяснить результаты эксперимента, который вы сами же должны проделать. На рис. 123 показана решётка из вертикальных и горизонтальных линий. Возьмите кусок картона, проведите по нему лезвием бритвы и посмотрите на рисунок одним глазом через образовавшуюся в картоне тонкую щель. Щель держите рядом с глазом и направьте её горизонтально. Расстояние от глаза до рисунка должно быть 30-40 см. Вы обнаружите, что в решётке сохранились только вертикальные линии, а горизонтальные исчезли. Куда они девались?

Рис. 123

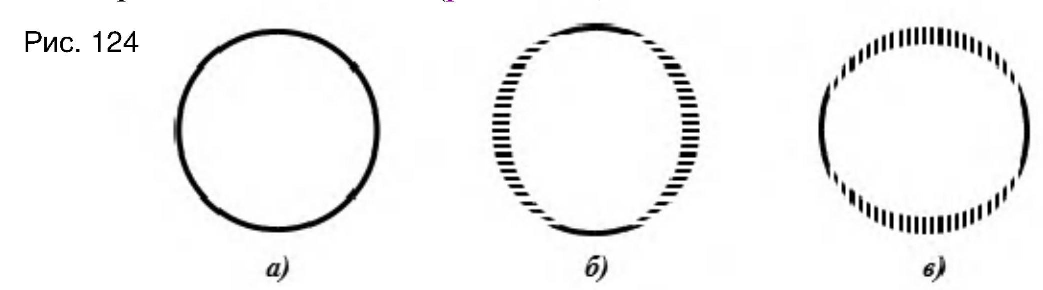


Б

У вас не получился эксперимент? Вы видите всю решётку? Или, наоборот, ничего не видите? В первом случае у вас слишком широкая щель, во втором – слишком узкая. Надо немного повозиться: попробуйте слегка сгибать картон, чтобы ширина щели менялась (оптимум – порядка 1-10 мкм). Опыт лучше удаётся, если решётка сильно освещена, а обращённая к глазу сторона картона не освещена совсем.

Ну, вот, наконец, у вас получилось. Не правда ли, несколько странное зрелище? А теперь поверните щель на 90° и вы увидите, что исчезли вертикальные линии решётки и появились горизонтальные. Для того чтобы разобраться в увиденном, советуем посмотреть ещё на кольцо (рис. 124*а*).

Рис. 124



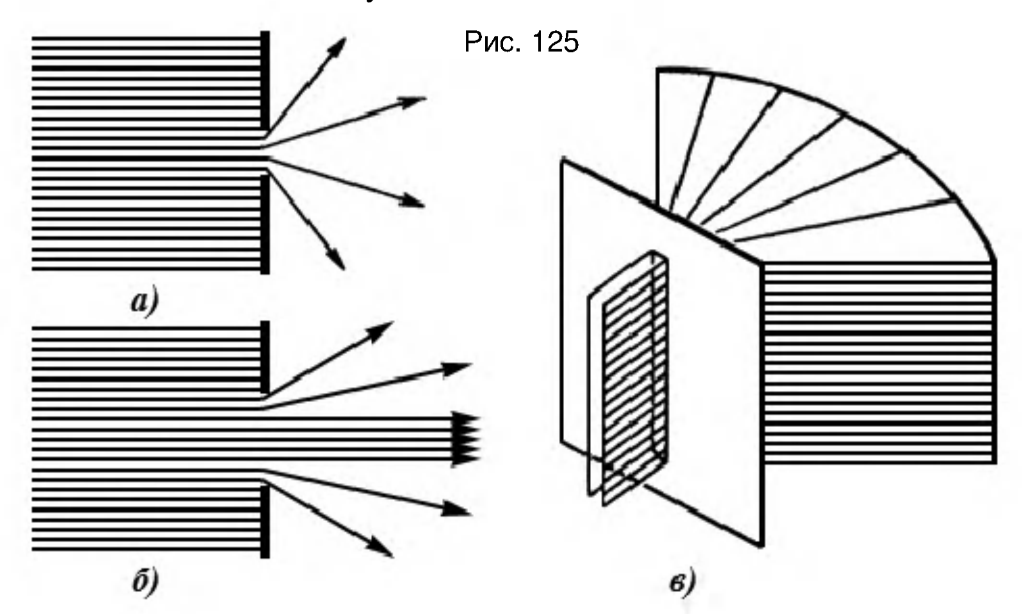
При вертикальной щели вы увидите размытыми левую и правую стороны кольца, при горизонтальной – верхнюю и нижнюю (рис. 124*б* и *в*). Повторите опыт при разных наклонах щели. Оказывается, что всегда размываются те участки кольца, которые идут вдоль щели, и сохраняются идущие поперёк.

Если, однако, у вас всё наоборот (сохранились линии, параллельные щели, и исчезли перпендикулярные), то это значит, что вы не соблюли условий (у вас слишком широкая щель, и вы слишком приблизились к решётке) и попали в следующую задачу.

В

Объяснение этого явления следует искать в дифракции света. Известно, что свет, проходя рядом с препятствием, искривляет свой путь, огибая препятствие и заходя туда, где по законам прямолинейного распространения должна быть тень. Параллельный пучок лучей, падающий на экран с маленьким отверстием (рис. 125*а*), после прохождения сквозь отверстие оказывается расходящимся. Чем меньше отверстие, тем сильнее расхождение лучей. Для очень малого отверстия (порядка длины волны света, т.е. микрометр и менее) картина лучей, оказывается такой, как будто отверстие является точечным излучателем.

Рис. 125

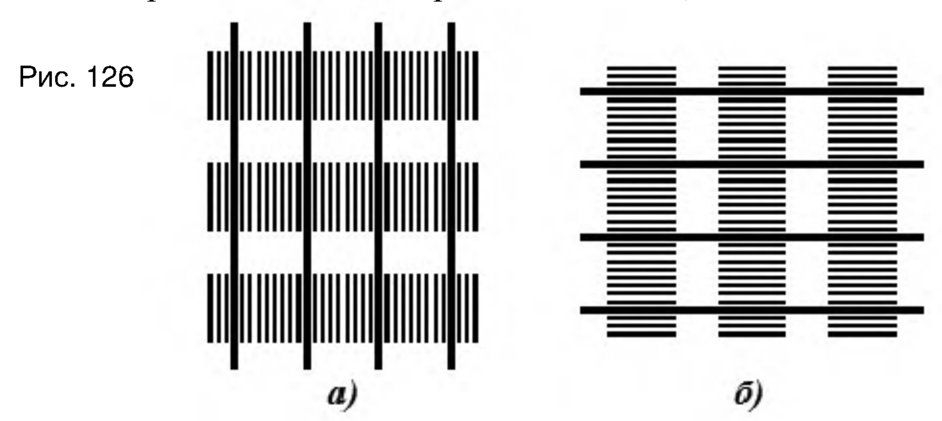


При прохождении сквозь большое отверстие основная часть лучей проходит практически без искривления пути. И только те лучи, которые проходят сквозь отверстие рядом с его краями, искривляют свой путь (рис. 125*б*). Прорезанная бритвой

щель является отверстием, размеры которого очень малы в одном измерении и очень велики в другом. Поэтому световой пучок, проходящий сквозь щель, претерпевает сильную дифракцию в плоскости, перпендикулярной к щели, почти не подвергаясь дифракции во второй плоскости. Представление о поведении лучей после щели даёт рис. 125*в*.

Пусть щель параллельна горизонтальным линиям решётки. Тогда лучи, проходящие от решётки сквозь щель к глазу, рассыпаются веером в вертикальной плоскости, отчего каждая точка размывается по вертикали, а горизонтальная чёрная линия становится очень широкой (рис. 126*а*). Поскольку размываются не только горизонтальные чёрные линии, но и белые просветы между ними, то горизонтальные линии оказываются широкими бледно-серыми полосами, едва заметными для глаза.

Рис. 126



С вертикальной чёрной линией дело обстоит несколько иначе. Все её точки, конечно, также размываются в вертикальном направлении и не размываются в горизонтальном. Но при этом их размытые изображения накладываются друг на друга вдоль само́й вертикальной линии. В изображение вертикальной линии не замешивается свет от размытия белых точек (так как белые точки тоже размываются только по вертикали). Поэтому вертикальная линия остается чёрной и хорошо видна на сером фоне.

Если щель повернуть на 90°, то направление размытия тоже повернётся. Теперь каждая точка (и белая, и чёрная) будет размываться в горизонтальном направлении (рис. 126*б*), и от их смешения вертикальные чёрные линии станут широкими и бледными. Горизонтальные же линии, которые размываются каждая вдоль самой себя, останутся чёткими.

87. Заглядывая в щель

А

А теперь, согнув картон так, чтобы щель разошлась до 0,5-1 мм (или прорезав новую щель нужной ширины), приблизьтесь с нею к решётке на расстояние 5-7 см. И вы увидите *обратное* тому, что было в предыдущей задаче: при горизонтальном положении щели отчётливо будут видны горизонтальные линии, при вертикальном – вертикальные!

Видимо, это тоже можно объяснить. Но сделать это надо так, чтобы не пострадала наша дифракционная теория. Иначе вам придётся заново объяснять предыдущий результат. А он ведь противоположен данному.

Б

Щель шириной порядка 0,5 мм – очень широкая: в ней укладывается около 1000 световых волн. Следовательно, подавляющая часть лучей проходит прямолинейно, и дифракцией в этом опыте можно пренебречь. Она отступает на второй план перед каким-то новым явлением.

Поставьте дополнительный эксперимент: приблизьте глаз к решётке на 5-7 см *без щели*. Вы увидите размытыми и горизонтальные и вертикальные линии. Это и понятно: на таком малом расстоянии нормальный глаз не может фокусировать изображение на сетчатку, зрачок является слишком длиннофокусной линзой для этого.

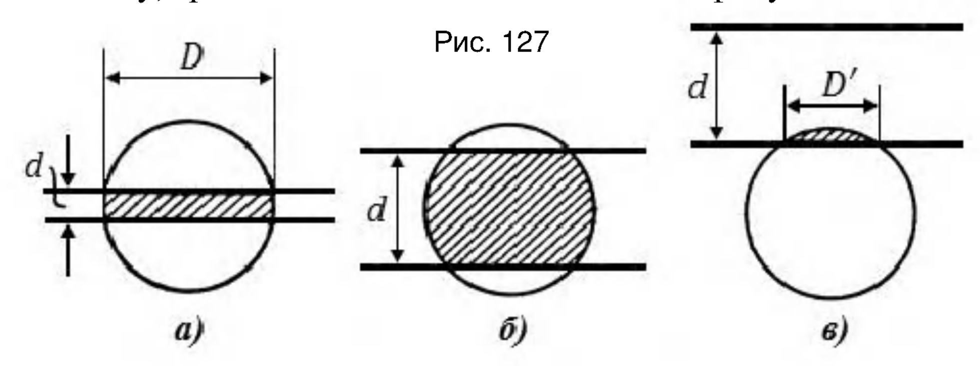


Рис. 127

Введите теперь между глазом и решёткой щель – и качество изображения линий, параллельных щели, улучшится, а перпендикулярных к ней – останется плохим. Расширьте щель до 3-4 мм – и линии, параллельные щели, тоже размажутся, кроме тех двух, которые находятся на краях поля зрения. Это довольно странно. Ведь не меняет же щель фокусного расстояния зрачка! Правильно, не меняет. Но она ограничивает ширину светового пучка, входящего в зрачок. По существу, вы взамен своего круглого зрачка диаметром, например, $D = 3$ мм приобретаете новый, щелевой (как у кошки!) «зрачок» длиной $D = 3$ мм и шириной $d = 0{,}5$ мм (на рис. 127a заштрихован).

В

На рис. 128 точки A и $Б$ являются следами двух прямых решётки, перпендикулярных к чертежу. Решётка настолько близка к зрачку $Г$, что тот не может фокусировать её изображение на сетчатку. Он фокусирует A и $Б$ в A' и $Б'$. Если щель $В$ отсутствует, то в создании изображения A участвует весь зрачок. При этом линия решётки A на сетчатку проектируется в виде размытой полосы шириной 1-4. Если, однако, между зрачком и решёткой ввести узкую щель $В$, параллельную прямой A, то

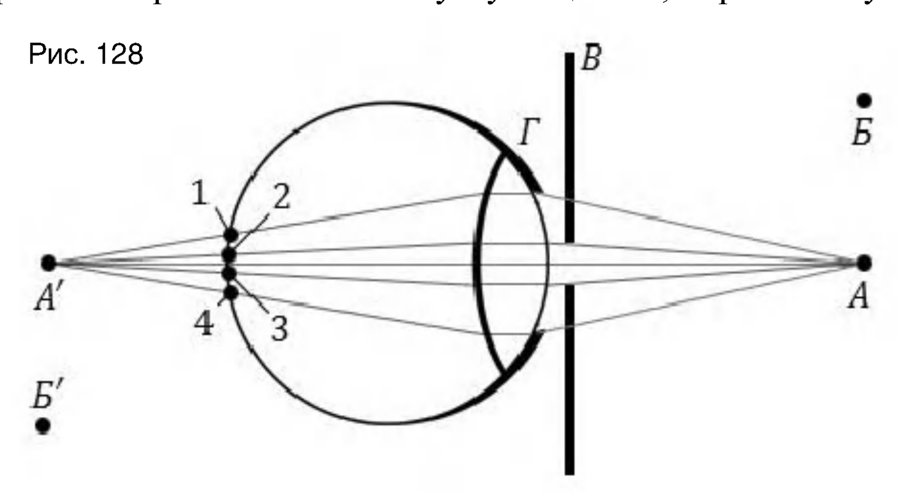


Рис. 128

ширина полосы на сетчатке уменьшится до 2-3. Если $d = 0{,}1D$, то размытость изображения прямой, параллельной щели, уменьшится примерно в 10 раз, отчего прямая будет видна вполне чёткой. Прямые же, перпендикулярные к щели, останутся размытыми, так как длина щели больше диаметра зрачка D, и поэтому степень размытости вдоль щели по-прежнему определяется полным диаметром зрачка.

На рис. 129*а* показан вид сквозь сравнительно узкую щель, на рис. 129*б* – сквозь широкую ($d = 3 \div 4$ мм). При широкой щели размываются не только прямые 1, 2, 3, 4, перпендикулярные к щели, но и прямые 6, 7, ей параллельные. Прямые же 5 и 8, находящиеся у краёв поля зрения, всё ещё достаточно чётки.

Объяснить это можно с помощью рис. 127*б* и *в*. Для прямых 6 и 7, находящихся в центре поля зрения, «зрачок» при широкой щели оказывается широким в обоих измерениях (рис. 127*б*), отчего в центре размываются и горизонтальные, и вертикальные линии. Для крайних же прямых 5 и 8 «зрачок» (на рис. 127*в* заштрихован) в вертикальном направлении оказывается узким, так как начинает ограничиваться сверху (или снизу) уже не границей щели, а границей зрачка (окружностью). Любопытно, что при этом «зрачок» сужается частично и в горизонтальном направлении: хорда D' меньше диаметра D. Это приводит к улучшению фокусировки концов вертикальных прямых и к выпуклости их размытых изображений.

Рис. 129

Итак, щель, ограничивая размеры зрачка, позволяет улучшить качество изображения в одном из измерений. Интересно, что люди с ослабленным зрением интуитивно используют это свойство щели: желая разглядеть что-либо получше, они прищуривают глаза.

Чтобы улучшить изображение в обоих измерениях, нужно использовать не щелевое, а «точечное» отверстие (менее 1 мм). Яркий свет вызывает естественное сужение зрачка, что автоматически улучшает чёткость. При ярком солнечном освещении текст остаётся разборчивым даже на расстоянии 5-7 см от глаза.

Кстати, посмотрите ещё на текст книги через щель, придавая ей различную ориентацию и наблюдая за изменением характера шрифта. Сделайте также двойную щель (например, протянув по оси симметрии щели гладкую чёрную нитку). Через двойную щель линии решётки, параллельные щели, кажутся двоящимися.

Фотолюбителям известно, что диафрагмирование объектива улучшает чёткость даже тогда, когда объект съёмки находится в пределах нормальных расстояний, допускающих фокусировку (при этом диафрагма ослабляет сферическую и другие виды аберрации, увеличивает глубину резко изображаемого пространства). Если же объект настолько близок к фотоаппарату, что фокусировка уже невозможна, то единственным способом получить приемлемую чёткость является сильное диафрагмирование (с соответствующим увеличением выдержки или освещённости).

88. Проглядывая сквозь щель

А

А вот вам ещё задача с решёткой, внешне даже похожая на предыдущую, но совсем иная.

На западной стороне горизонта видны далёкие облака. Заходящее Солнце, которое вот-вот коснётся горизонта, в последний раз (на сегодня, разумеется, – без этой оговорки фраза была бы слишком пессимистичной) пробилось своими лучами сквозь щель между облаками и осветило решётку – ограду сада, стоящую перед домом. Почему же в тени́, отбрасываемой решёткой на стену, отсутствуют тени вертикальных прутьев, в то время как те́ни горизонтальных видны отчётливо? Толщина тех и других прутьев одинакова.

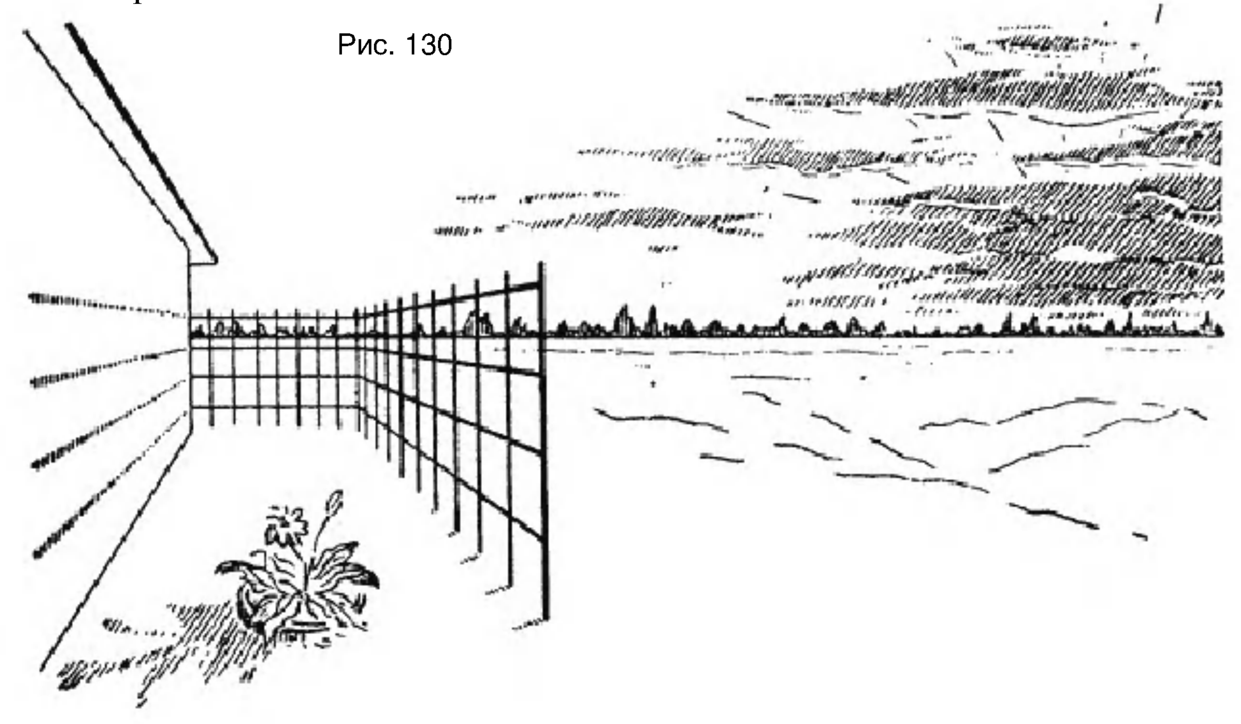
Б

В этой задаче, как и в предыдущих, налицо и решётка, и щель, и лучи. Однако привлекать для объяснения дифракцию не следует: размеры щели между облаками измеряются километрами, и, следовательно, щель никак не может быть названа узкой.

Для ответа на вопрос следовало бы понаблюдать это явление в действительности. Правда, для этого нужно удачное стечение обстоятельств: решётка[1], стена, закат, рваные облака, свободная минутка и энтузиазм. Для тех, кто не располагает каким-либо из этих элементов, мы приводим на рис. 130 дом с решёткой и её тенями и закат с облаками.

Вам поможет тот факт, что в таких обстоятельствах никогда не удаётся увидеть явление, обратное описанному: никогда вы не увидите теней вертикальных прутьев без теней горизонтальных.

Рис. 130



[1] Можно обойтись без решётки: возьмите палку и придайте ей сначала горизонтальное, а затем вертикальное положение.

В

Явление объясняется просто: проглянувшее в щель Солнце видно как источник света, протяжённый в горизонтальном направлении и узкий в вертикальном. Чем протяжённее источник света, тем короче конус тени, тем шире полутень. То, что в данном случае источник света протяжён в горизонтальном направлении, приводит к размытию тени в этом направлении. В вертикальном же направлении тень почти не размывается (ср. рис. 131*а* и *б*). В результате тень горизонтального прута размывается вдоль самой себя, а тень вертикального – поперёк. Первая остаётся поэтому совершенно чёткой, а вторая превращается в широкую бледную полосу полутени.

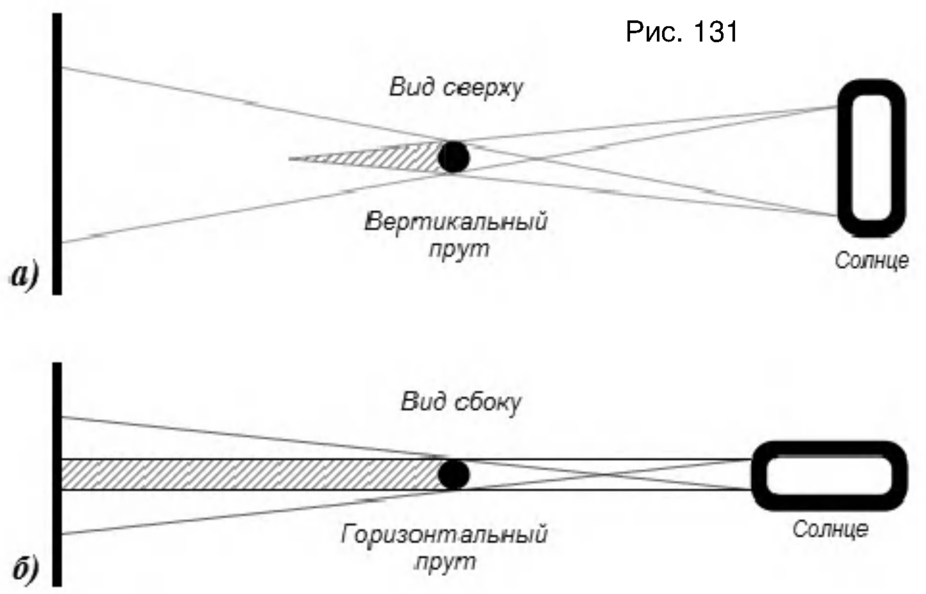


Рис. 131

Задача кажется похожей на предыдущую: Солнце здесь очень напоминает ограниченный щелью зрачок. Но не поддавайтесь обману: это совершенно разные явления, уже хотя бы потому, что основой предыдущей задачи были фокусирующие свойства линзы-зрачка, а здесь линзы нет.

– Позвольте, – скажет внимательный читатель, – а почему же никогда не наблюдается обратное явление? Ведь ориентация щели между облаками чисто случайна! А если щель окажется вертикальной? Тогда размоются тени горизонтальных прутьев, а тени вертикальных будут чёткими.

В том-то и дело, что у горизонта щели между далёкими облаками нам всегда представляются горизонтальными. И это не случайно. Пусть «щель» между облаками на самом деле имеет форму круглого отверстия. Если бы она была в зените, то мы её и увидели бы круглой. Если тот же горизонтальный круг будет у са́мого горизонта, то мы увидим его в виде сильно сжатого по вертикали эллипса (рис. 132), так как мы разглядываем этот круг почти с ребра (здесь мы опускаем детали, связанные с конечной толщиной облаков по вертикали). Вот почему все облака у горизонта и щели между ними всегда кажутся вытянутыми в горизонтальном направлении. А это и приводит к рассмотренному явлению.

Рис. 132

89. На зеркало неча пенять…

А

Применяя пословицу «На зеркало неча пенять, коли рожа крива», хотят сказать, что зеркало (разумеется, плоское) всегда говорит правду, показывает всё как есть.

Сегодня дождливый день, и дом отражается в мокром асфальте (рис. 133). Почему же в изображении до́ма все о́кна светлые, хотя в само́м доме о́кна нижних этажей тёмные?



Рис. 133

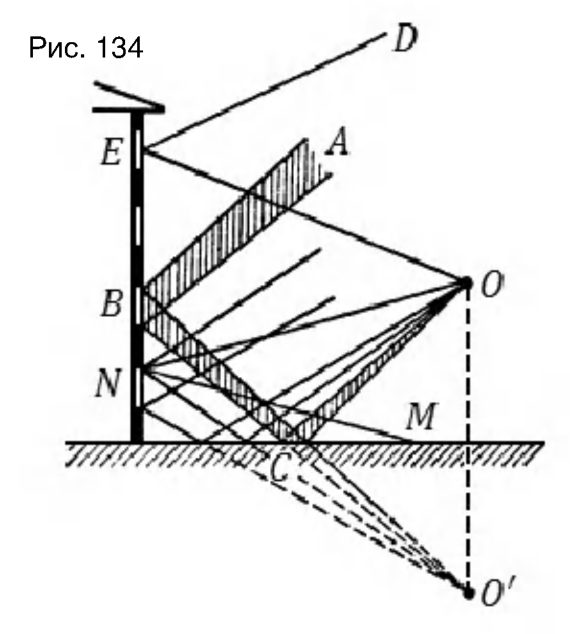


Рис. 134

Б

Почему в самом доме окна нижних этажей тёмные, а верхних – светлые? Как легко заметить, наблюдатель находится в двухэтажном доме на втором этаже (окна второго этажа обоих корпусов ему видны на одном уровне). Следовательно, в окнах двух верхних этажей для него видно отражённое небо, в окнах нижних этажей – земля и строения. Постройте ход лучей (вид сбоку) и определите, что отражается к наблюдателю от асфальта.

В

На рис. 134 показан ход лучей к наблюдателю O в системе двух взаимно перпендикулярных зеркал (окна́ и асфальта). Глядя непосредственно на дом, наблюдатель O видит в нижнем окне N отражение точки M, т.е. тёмную землю[1], а в верхнем окне E – светлое небо (D). Глядя на мокрый асфальт, наблюдатель O во всех окнах видит небо: он видит то, что видел бы в окнах наблюдатель O' (являющийся зеркальным изображением в асфальте наблюдателя O), если бы не было асфальта и земли. Так, например, в отражении окна B наблюдатель O видит свет неба, пришедший к нему по ломаной $ABCO$.

Пословица всегда говорила об одном зеркале и никогда не претендовала на описание системы двух зеркал.

[1] Если в точке M лужа, то наблюдатель O по ломаной ONM видит отражение в луже, но не неба, а собственного лица.

90. Подмигивающая звезда

Человек! возведи взор свой от земли к небу, – какой, удивления достойный, является там порядок!

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 78*а*

А

Взгляните на звёздное небо. Каждая звезда вам приятельски подмигивает, то увеличивая, то уменьшая световой поток, посылаемый в ваши глаза. Это, конечно, можно объяснить. Вы вспоминаете даже, что это вам уже кто-то объяснял: то ли ваш учитель астрономии, то ли одна из книг Перельмана.

Выберите яркую, сравнительно одинокую звезду – Капеллу, Арктур (только не планету!). Станьте так, чтобы вершина какого-нибудь столба, шеста оказалась рядом со звездой, находясь от вас на расстоянии 2-10 м. Если такого шеста нет, его придётся организовать. Сосредоточьтесь взглядом на вершине, при этом звезда раздвоится. Причина раздвоения понятна: óси ваших глаз сейчас пересекаются не на звезде, а на вершине столба (если вы сосредоточитесь на звезде, то раздвоится столб). Похожие вещи вы встречали в задаче «С неба звёздочку достану».

Итак, всё готово? Вы сосредоточили зрение на вершине столба, а внимание – на раздвоенной звезде.

Объясните теперь, почему обе «половинки» звезды мигают не в такт? Почему одному вашему глазу звезда подмигивает иначе, чем другому?

Б

Вам придётся сначала вспомнить, почему звёзды мигают вообще. Кстати, в одной из предыдущих задач этой книги есть почти всё, что вам может понадобиться сейчас. Вспомнили? Правильно, это задача «Тайны оконного стекла». Прочитайте её внимательно ещё раз.

В

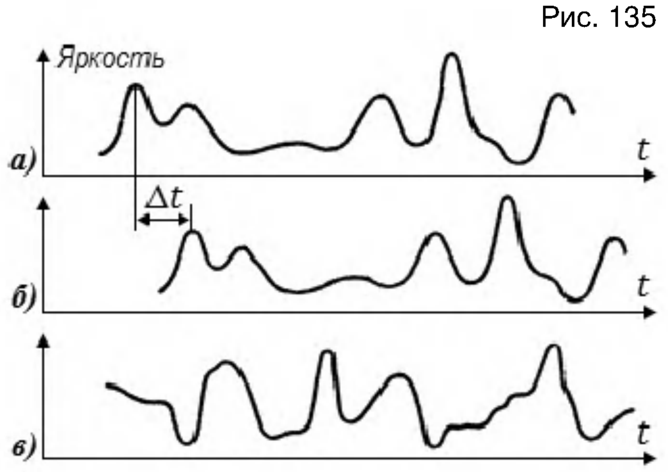
Наша атмосфера неоднородна. В ней всегда имеются уплотнения и разрежения. В уплотнениях показатель преломления выше, в разрежениях – ниже. Эти неоднородности перемещаются ветром, поэтому лучи звезды, попадающие в наш глаз, проходят то через собирающую «линзу», отчего яркость звезды возрастает, то через рассеивающую. Эти «линзы» расположены хаотично, поэтому мерцание звезды беспорядочно. Беспорядок увеличивается оттого, что стру́и нагретого и холодного воздуха непрерывно перемешиваются, а также потому, что эти «линзы» имеются не на одной какой-либо высоте, а во всей толще атмосферы.

Плотность воздуха в неоднородностях ничтожно мало отличается от средней, тем не менее мерцание оказывается довольно интенсивным. Это легко понять, если вспомнить, что расстояние между «линзой» и глазом измеряется километрами. Даже слабая, очень длиннофокусная линза на таком расстоянии может заметно сконцентрировать (или рассеять) лучи.

Если размер «линзы» намного больше расстояния между глазами (6-7 см), то в первом приближении можно считать, что оба глаза одновременно будут попадать в сконцентрированный (или рассеянный) световой поток, отчего мерцание звезды для обоих глаз будет приблизительно одинаковым, обе половинки звезды будут подмигивать дружно, «в ногу». Если же «линзы» мелкие, менее 5 см, то может получиться так, что один глаз видит яркую «половинку» звезды тогда, когда второй – слабую, и наоборот. Как правило, на разных высотах одновременно существуют «линзы» самых разнообразных размеров, поэтому в мерцании звезды одновременно присутствуют и «дружная» (одинаковая для обоих глаз), и «недружная» составляющие. Таково, в общих чертах, объяснение.

Представим, что все «линзы» мелкие и находятся в тонком слое на одной высоте, не меняются во времени, но перемещаются в некотором направлении со скоростью ветра. Или, что то же самое, представим, что на этой высоте движется горизонтально огромный лист стекла (с тем, однако, отличием, что на стекле вместо полосатых неоднородностей – пятнистые). Пусть база глаз (прямая, соединяющая оба зрачка) ориентирована параллельно вектору ветра. Тогда мерцание звезды для одного глаза (кривая на рис. 135*а*) будет в точности[1] копировать мерцание для другого (кривая рис. 135*б*), только со сдвигом во времени Δt, который равен времени перехода «линзы» от одного глаза к другому. Следовательно,

Рис. 135



$$\Delta t = \frac{l}{v},$$

где l – база глаз, v – скорость ветра.

Записав эти световые сигналы и измерив запаздывание Δt, мы можем определить скорость ветра на той высоте, на которой находятся неоднородности!

Длительность же каждого из мерцаний связана (сложным образом) с размером «линз» и их высотой и позволяет получить о них определённое представление.

Не зная направления ветра, мы не можем ориентировать базу глаз параллельно ему. Если база окажется случайно под большим углом к направлению ветра (например, 90°), то «линзы», проходящие перед одним глазом, не будут проходить перед другим. Тогда между кривыми для одного и другого глаза не будет никакой связи: кривая рис. 135*в* не повторяет кривую рис. 135*а*, ведёт себя совершенно независимо. В этом случае измерения скорости невозможны. Но именно тот факт, что между кривыми нет связи (нет, как говорят, корреляции), позволяет установить, что база глаз (или двух фотоэлементов) не параллельна ветру. Будем поворачивать базу до тех пор, пока корреляция между кривыми не станет максимальной. Этим самым мы повернём её параллельно ветру и, следовательно, определим направление ветра!

Разумеется, степень связи между кривыми очень трудно оценить на глаз. Но существуют специальные приборы – коррелометры, которые делают это автоматически наилучшим образом.

[1] Если за время Δt структура неоднородностей не успевает измениться.

Если «линзы» имеют большие размеры, то корреляция будет иметь место даже при базе, перпендикулярной к ветру. Тогда нужно увеличить базу так, чтобы она превзошла размер «линз». Глаза раздвинуть непосредственно, конечно, нельзя. Но существуют приборы (стереотрубы, стереодальномеры), которые позволяют это сделать косвенно: расстояние между окулярами равно базе глаз, а между объективами – существенно больше. Последнее и будет новой базой. Нечего и говорить, что расстояние между двумя фотоэлементами, регистрирующими две кривые, можно взять любым.

Переходя от движущегося «стеклянного листа» к реальной атмосфере, мы с грустью обнаружим, что всё осложняется и запутывается настолько, что даже коррелометрам приходится туго. Тем не менее, они всё-таки дают много ценной информации о размерах неоднородностей, о скорости и направлении их перемещения.

Планета, в отличие от звезды, не мерцает (точнее, почти не мерцает), потому что системы теневых и светлых пятен, падающих на поверхность Земли (и на наблюдателя), создаваемые разными точками планеты, не совпадают. В результате светлые участки от одних точек налагаются на тёмные от других, и в среднем получается почти постоянная освещённость. Звезда же так далека, что для земного наблюдателя всегда остается единственной точкой.

91. Марафон между зеркалами

А

В некоторых оптических приборах требуется, чтобы световой сигнал на пути от источника A к приёмнику B запоздал на время большее, чем время пробега по прямой AB. Этого можно добиться, если послать луч из A в B не по прямой, а по ломаной. На рис. 136 движение луча по весьма длинной ломаной обеспечивается за счёт многократного отражения от двух параллельных зеркал CD и EF. Как изменится длина ломаной 1-2-3-...-21, если расстояние между зеркалами увеличить вдвое?

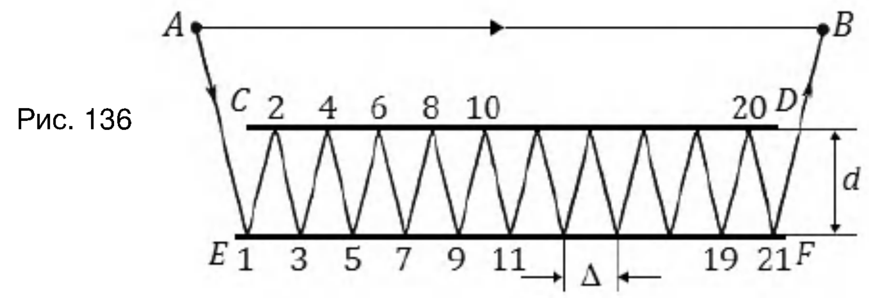


Рис. 136

Б

На первый взгляд, длина ломаной (и запаздывание светового сигнала) возрастёт вдвое, потому что длина каждого прямолинейного отрезка ломаной удвоится. На самом же деле… впрочем, вы лучше сами. Покажите, как сделать, чтобы в этом устройстве запаздывание действительно увеличилось вдвое.

В

Пока зеркало находилось в положении CD (пунктир на рис. 137a), траектория луча между зеркалами была 1234567.... Когда расстояние удвоилось ($C'D'$), траек-

тория стала $123'4567'$…. Появившиеся новые участки пути $23'4$, $67'8$, … удлиняют общий путь ровно на столько, на сколько он укоротился из-за исчезновения симметричных им старых 234, 678, …. В самом деле, старый путь 234 является как бы зеркальным изображением нового пути $23'4$ (в «исчезнувшем» зеркале CD), и в случае плоского зеркала эти пути равны. Таким образом, протяжённость пути между зеркалами не изменилась.

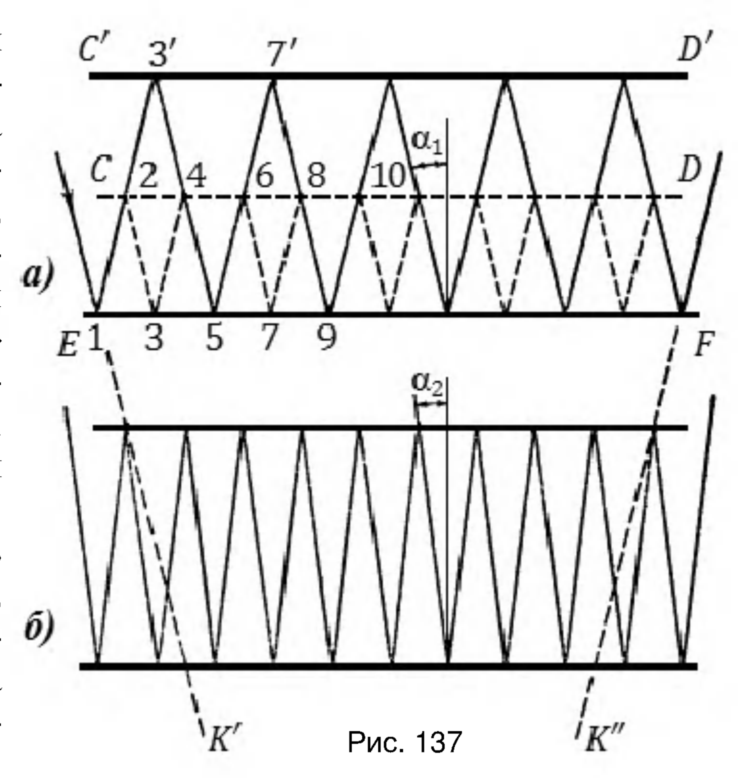


Рис. 137

Что же изменилось? Уменьшилось число отражений: теперь в точках 2, 4, 6, 8, … луч не отражается. Протяжённость каждого прямолинейного отрезка увеличилась вдвое, но число таких отрезков уменьшилось тоже вдвое.

Интересно, что ту же длину пути мы получили бы с помощью единственного зеркальца, расположенного на пересечении прямых EK' и FK'' (рис. 137*б*), но габариты установки от этого резко бы возросли.

Для удлинения пути нужно уменьшать угол падения луча на зеркало (сравните α_1 и α_2 на рис. 137*а* и *б*). При этом если углы α_1 и α_2 малы, то дли́ны прямолинейных отрезков почти не уменьшаются, но число этих отрезков возрастает. Если $\alpha_2 = \alpha_1/2$, то полный путь почти удваивается (уточнить этот результат вы можете сами).

Но есть ли какая-нибудь польза от раздвигания зеркал? Или только вред, выражающийся в увеличении габаритов установки? Есть, только в ином смысле. Давайте вычислим, какой процент от световой энергии, вошедшей в систему зеркал, достигнет выхода. Коэффициент отражения любого зеркала в световом диапазоне меньше единицы. У лучшего из отражающих металлов – серебра – он равен 0,94 (при $\lambda = 600$ нм, т.е. при жёлтом свете). После первого отражения останется 0,94 от первичного светового потока, после второго – 0,94 от 0,94, т.е. $(0{,}94)^2$, после n-го останется $(0{,}94)^n$. Легко подсчитать (с помощью логарифмирования), что после 50 отражений останется 0,045, после ста – 0,002, после двухсот – 0,000 004, после четырёхсот отражений – 0,000 000 000 016 от первичного светового потока.

Таким образом, слишком большое число отражений может настолько уменьшить выходной световой поток, что его не смогут обнаружить самые чувствительные приборы, так как он будет намного меньше посторонней засветки, даже ночью. Раздвижение зеркал, не увеличивая полной длины пути, уменьшает число отражений, отчего выходной поток возрастает. Если зеркалá давали 400 отражений, то, раздвигая их вдвое, мы уменьшаем число отражений вдвое и этим самым увеличиваем выходной световой поток в 250 000 раз!

Мы рассмотрели пока только частный случай, когда зеркалá раздвигаются ровно вдвое. На этом задачу можно было бы считать исчерпанной.

Однако интересно посмотреть, что будет, если зеркалá раздвинуть чуть-чуть.

На рис. 136 показано нечётное число, отражений (21). Будем раздвигать постепенно зеркала (поднимать CD вверх) и следить за поведением «гармошки» луча. Она растягивается. Точка 1 остаётся на месте, все остальные сползают вправо, тем быстрее, чем выше номер. Точка 21 сползает в 20 раз быстрее, чем точка 2. Очень скоро точка 21 соскользнёт с зеркала (число отражений станет чётным), и луч 21-B пойдёт не вверх, а вниз, как продолжение луча 20-21. Затем соскользнёт с верхнего зеркала точка 20, число отражений снова станет нечётным, и выходной луч опять пойдёт вверх, и т.д.

А теперь представьте, что вы раздвигаете зеркала́ так мало, что число отражений при этом не меняется. Это условие соблюдается, если при расстоянии между зеркалами d и наличии $n+1$ отражений вы раздвигаете зеркала́ не более чем на d/n (т.е. при 21 отражении – не более чем на $d/20$). Вот тут как раз и проявляется то свойство, которое мы интуитивно ощущали вначале: если число отражений не меняется, то полный путь луча возрастает пропорционально расстоянию между зеркалами. Причём если новое расстояние стало $d+\Delta$, то новый путь луча стал $n(d+\Delta)$, т.е. возрос на $n\Delta$. Если пластины раздвигаются со скоростью 1 см/с, то путь луча удлиняется в n раз быстрее. Мы получили своеобразный *усилитель скорости*.

Этому усилителю скорости можно найти интересное применение. Существует гипотеза, что африканский и европейский континенты расходятся, т.е. Гибралтарский пролив расширяется. Как это проверить? С помощью эффекта Доплера (см. задачи «Волны и поплавки», «Письма с дороги»). Надо послать световой луч определённой частоты с африканского берега на зеркало, расположенное на европейском берегу, и, приняв отражённый сигнал, сравнить его с посылаемым. Если зеркало и приёмник света взаимно неподвижны, то частота принятого сигнала в точности будет равна частоте посылаемого. Но если европейское зеркало действительно удаляется от африканских источника и приёмника света, то принятая частота будет ниже посылаемой на величину доплеровской поправки

$$F_D = f_0\frac{2v}{c} = \frac{2v}{\lambda},$$

и в специальном смесителе прямого и отражённого лучей можно выделить разностную частоту. Происхождение двойки в числителе формулы объяснено в задаче «Письма с дороги»: частота сдвигается при прохождении сигнала и к зеркалу, и обратно.

Однако если континенты и расходятся, то так медленно, что доплеровский сдвиг будет мал по сравнению с шириной спектральной линии и поэтому не будет обнаружен. Спектральная линия излучения лазера гораздо тоньше спектральных линий обычных источников света, но и она для этого эксперимента может оказаться слишком широкой.

Вы уже знаете, что надо сделать. Надо взять два зеркала и разместить их по обе стороны Гибралтара параллельно друг другу. Если луч лазера претерпит в системе зеркал n отражений, т.е. пересечёт Гибралтар $n+1$ раз, то в приведённой выше формуле вместо двойки будет стоять число $n+1$, так как каждый из $n+1$ путей удлиняется со скоростью v, с которой расходятся континенты, и в результате полный путь будет удлиняться со скоростью $(n+1)v$. Создав 999 отражений (число должно быть нечётным, иначе луч не вернётся на тот континент, с которого он был отправлен, и его частоту нельзя будет сравнить с посылаемой), мы усилим доплеровский сдвиг в тысячу раз и, возможно, обнаружим разбегание континентов.

Если же не обнаружим, то это ещё не значит, что континенты взаимно неподвижны. Это значит только, что скорость движения, если она есть, меньше ожидаемой. Тогда нужно создать не 1000, а 10 000 или ещё больше отражений.

Отметим, что, несмотря на такое большое число отражений, в случае лазера можно ещё надеяться, что сигнал не будет потерян из-за поглощения, так как, во-первых, в луче лазера можно сконцентрировать весьма большую энергию (а чтобы зеркала не расплавились, их можно охлаждать) и, во-вторых, поскольку спектральная линия лазера очень тонкая, то её можно отфильтровать от посторонней засветки с помощью очень узкополосных светофильтров (или радиофильтров).

Кроме того, и отражающие свойства зеркал можно улучшить. Нашли, что зеркало с многослойным диэлектрическим покрытием может дать коэффициент отражения ρ гораздо ближе к единице, чем серебряное. Удалось получить $\rho = 0{,}995$ с помощью тридцатислойного покрытия, у которого чередуются слои с малым и большим показателями преломления, причём толщина каждого слоя равна четверти волны (т.е. составляет доли микрометра). Коэффициент поглощения такого зеркала ($\varepsilon = 1 - \rho = 0{,}005$) в 12 раз меньше, чем у серебра. А это позволяет увеличить число отражений приблизительно в 12 раз[1].

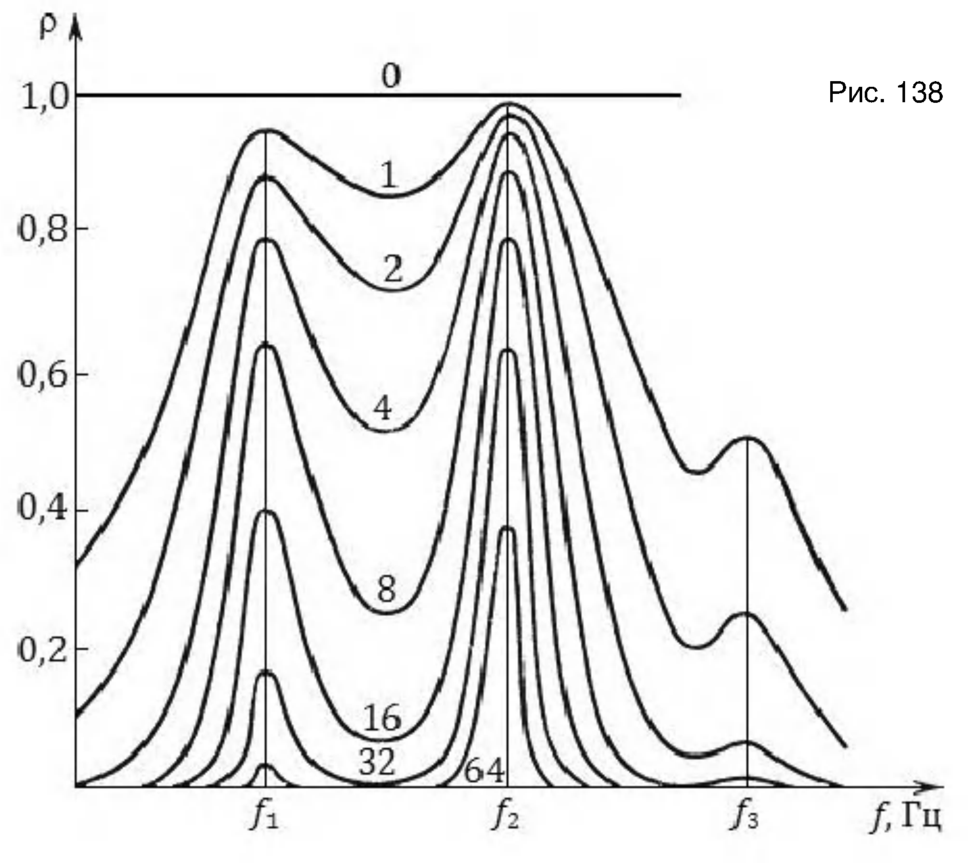


Рис. 138

Измерить столь малый коэффициент поглощения нелегко. Интересно, однако, что для повышения точности измерений можно использовать нашу систему зеркал. Она представляет собой усилитель коэффициента поглощения: чем больше отражений, тем сильнее результирующее поглощение. Зная число отражений и результирующее поглощение, мы можем вычислить поглощение, сопровождающее единичный акт отражения.

[1] Одним из наиболее поразительных открытий современной физики является то, что мощный световой луч сам может создать для себя зеркало с коэффициентом отражения, очень близким к единице (см., например: *Аскарьян Г.* Новые физические эффекты. «Наука и жизнь», 1967, № 10). Сверхмощный луч лазера при определённых условиях, создавая стоячие световые волны, перераспределяет плотность и давление внутри среды от волны к волне таким образом, что создается многослойное зеркало с правильным чередованием слоёв с различными показателями преломления (как упомянуто выше). При этом возникает также ультразвук, имеющий длину волны одного порядка с длиной волны лазера (и с частотой ниже частоты лазера во столько раз, во сколько скорость звука в данной среде ниже скорости света). В принципе возможно и обратное: создание зеркала для лазера с помощью стоячих волн от специального генератора ультразвука.

Особенно интересно это свойство, если рассматривать коэффициент отражения ρ не вообще, а как функцию частоты $\rho(f)$. Пусть некоторое металлическое зеркало освещается светом, интенсивность которого на всех частотах одинакова (горизонтальная прямая 0 на рис. 138). Металл отражает на разных частотах по-разному. Например, кривая 1 показывает, что некоторый металл хорошо отражает частоту f_2, несколько хуже – f_1 и ещё хуже – f_3. Равномерный спектр света 0 после первого отражения будет уже описываться кривой 1, т.е. будет неравномерным. После второго отражения – кривой 2, полученной умножением всех ординат кривой 1 на самих себя:

$$\rho_2(f) = \rho_1^2(f) .$$

После четвёртого отражения

$$\rho_4(f) = [\rho_2(f)]^2 = \rho_1^4(f) ,$$

после восьмого

$$\rho_8(f) = \rho_1^8(f)$$

и т.д. Более слабые спектральные линии f_1 и f_3 ослабевают быстрее, и после 64 отражений остаётся практически лишь частота f_2 – спектральная линия, на которой коэффициент поглощения минимален. Равномерный спектр 0 (белый свет) превращается в монохроматический (одноцветный) с цветом f_2.

С помощью этого явления в XIX веке определяли «истинный цвет металла». При этом золото оказывалось красным, серебро – оранжевым, медь – пурпурной. Вряд ли термин «истинный цвет» можно считать правильным. После какого числа отражений цвет можно считать «истинным»? После ста? Но после тысячи он ещё «истиннее»! А самый «истинный» – после бесконечного числа отражений – чёрный. По-видимому, разумнее цветом металла считать тот, который получается после первого отражения при облучении белым светом 0, т.е. кривую 1. Именно она правильно представляет интенсивность отражения на каждой из частот. Многократные же отражения позволяют лишь уточнить значение ρ для тех частот, где оно близко к 1.

Насколько известно автору, эксперимент с зеркалами и Гибралтаром ещё не поставлен. Но зато лазер и зеркало были использованы советскими учёными[1] в Антарктиде для изучения движения льдов. Поскольку скорость ледников значительно больше, чем предполагаемая скорость расширения Гибралтара, то удалось обойтись единственным зеркалом. Движение ледника оказалось весьма неравномерным. Максимальная скорость – 60 мкм/с, типичная – 0,1 мкм/с. Чаще всего он стоит неподвижно несколько часов (временами вибрируя).

92. Лицом к лицу с точностью

А

В этой задаче вам предстоит проверить себя на вполне серьёзной научной работе.

Допустим, что вы взялись за постановку того опыта, который описан в конце предыдущей задачи. Длина каждого зеркала 100 м, требуется получить около 1000 отражений. Вам нужно установить зеркало на европейском берегу Гибралтара строго параллельно зеркалу африканского берега. Мобилизовав всё своё умение, вы ус-

[1] *Богородский В.* Лазер исследует ледники. – «Правда», 23 октября 1971 г.

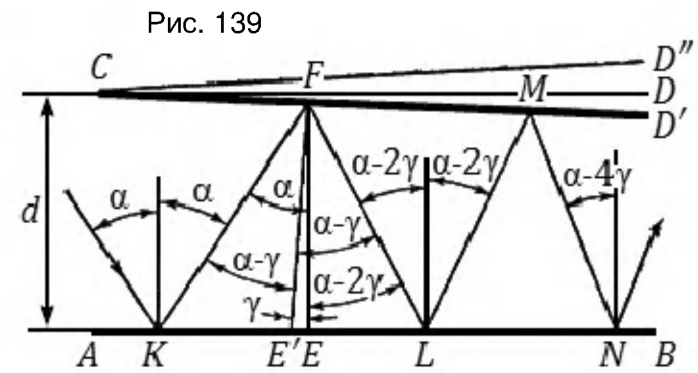
тановили его так, что непараллельность зеркал, если она и есть, составляет не более 0,0001°. Не правда ли, такой точностью можно гордиться!

Устроит ли вас эта точность? Какие другие трудности вам удастся предвидеть?

Б

Обычно на вопрос о точности отвечают так. Мы знаем, что если зеркало повернуть на угол γ, то отражённый луч повернётся на 2γ. Это легко доказать.

Рис. 139



Если зеркало CD (рис. 139) параллельно зеркалу AB, то все углы падения и углы отражения одинаковы и равны α. Если зеркало CD повернуть на угол γ (в положение CD'), то угол падения на него в точке F уменьшится на угол γ (потому что перпендикуляр FE повернётся на угол γ, в положение FE'). Но если угол падения KFE' стал равен $\alpha - \gamma$, то угол отражения $E'FL$ тоже будет $\alpha - \gamma$, отчего угол EFL станет $\alpha - 2\gamma$. Таков будет угол падения в точке L.

Итак, после отражений в K и F луч повернулся на 2γ, в L и M – ещё на 2γ, и т.д. После тысячи отражений он повернётся на 1000γ относительно того направления, под которым он вышел бы из системы зеркал, если бы оба зеркала были строго параллельны.

В нашем случае $1000\gamma = 0{,}1°$. Этот угол настолько мал, что не повлияет заметно на дли́ны отрезков KF, FL, LM и т.д. Эти дли́ны по-прежнему можно будет считать равными d. Следовательно, такая точность нас устраивает. Просто приёмник света придется немного передвинуть вправо или влево.

Рассуждения, в общем, правильные, но останавливаться рано. Внимательно учтя все обстоятельства, мы обнаружим, что из-за столь ничтожной погрешности луч *вообще не появится* на выходе системы зеркал (т.е. справа), а вернётся обратно налево. Напомним, что мы ещё не использовали длину зеркал, а также ширину Гибралтара R, которая равна 14 км.

В

От малых причин бывают великие последствия; так, отгрызение заусенца причинило моему знакомому рак.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 79*а*

Рассчитаем первоначальный угол падения α. Не зная точного значения и знака погрешности установки γ (если бы мы знали, то могли бы устранить; мы знаем только, что она не больше 0,0001°), расчёт будем вести, исходя из гипотезы, что погрешности нет. На стометровой системе зеркал 1000 отражений расположатся через 10 см. При расстоянии между зеркалами 14 000 м угол α будет

$$\alpha = \frac{10}{1\,400\,000} \text{ рад} \approx 0{,}00041°.$$

Если погрешность равна 0,0001°, то после каждого отражения из угла падения будет вычитаться 0,0001°. В результате после пятого отражения угол падения будет

$$\alpha - 5\gamma = 0{,}00041° - 0{,}0005° = -0{,}00009°,$$

т.е. будет уже отрицательным, а это значит, что луч, перестав передвигаться в системе зеркал вправо, повернёт влево. Двигаясь влево, он совершит ещё 4-5 отражений и выйдет из системы зеркал. Таким образом, всего будет около десятка отражений вместо требуемой тысячи. Система зеркал как бы выталкивает луч обратно (рис. 140). Чем меньше погрешность γ, тем глубже проникнет в систему луч.

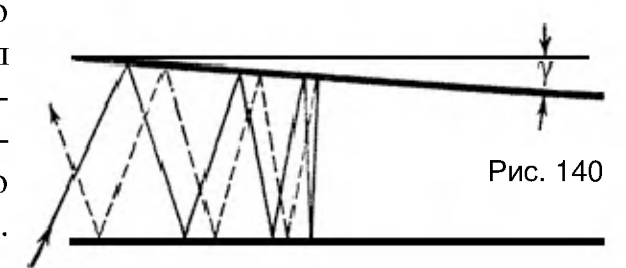


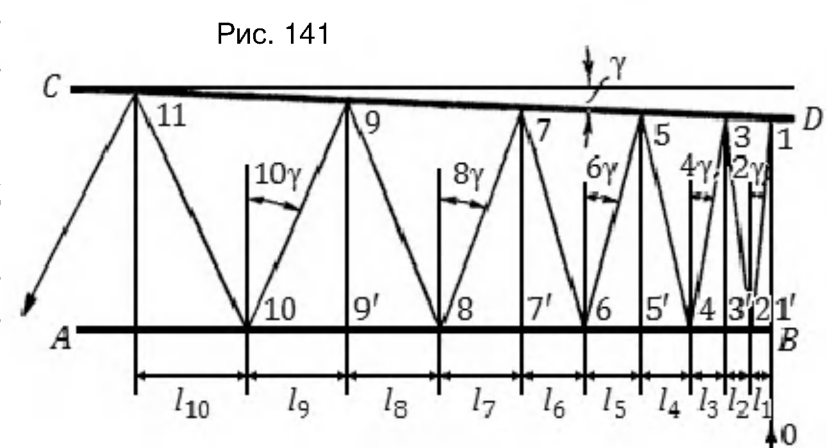
Рис. 140

Если знак погрешности противоположный (CD'' на рис. 139), то луч пройдёт всю систему зеркал, но теперь после каждого отражения угол падения будет *возрастать* на γ, отчего луч пробежит на выход слишком быстро, число отражений будет опять недостаточным.

Это явление можно использовать для других целей: для измерения очень малых углов. Система почти параллельных зеркал работает как *усилитель угла поворота*. Пока зеркала строго параллельны, луч выходит из системы под тем же углом, под которым он вошёл в неё, независимо от числа отражений n. Стоит, однако, повернуть одно из зеркал на ничтожно малый угол γ, как выходной луч повернётся на угол $n\gamma$, который мы можем измерить в n раз точнее (при той же абсолютной погрешности), чем непосредственно угол γ. Мы получаем своеобразный «угловой микроскоп», увеличивающий, в отличие от обычного микроскопа, не линейные размеры, а углы. Правда, для того чтобы этот «микроскоп» был точным, зеркала́ должны быть идеально плоскими (иначе угол γ будет переменным вдоль зеркала и вместо $n\gamma$ мы будем иметь $\gamma 1 + \gamma 2 + \gamma 3 + \ldots + \gamma n$).

Однако мы отвлеклись от нашей задачи. Как же всё-таки получить тысячу отражений? В предыдущем примере луч повернул обратно после пятого отражения, потому что угол $\alpha = 0{,}00041°$ был полностью исчерпан за пять шагов с помощью угла $\gamma = 0{,}0001°$. А если взять $\alpha = 0{,}1° = 1000\gamma$? Тогда этот угол будет исчерпан (и луч повернёт обратно) только после 1000 отражений! Или взять $\alpha = 0{,}05°$? Тогда луч повернёт назад после 500 отражений и, претерпев на обратном пути ещё 500, выйдет из системы там же, где вошёл, имея на своём трудовом счету 1000 отражений.

Рассуждения интересные, однако они не учитывают конечной длины зеркал. Подсчитаем, какое максимальное число отражений возможно в нашей системе. Максимум будет, очевидно, тогда, когда будет использована вся длина зеркала, причём «гармошка» луча будет наиболее сжатой. Надо послать слева в систему луч под таким углом, чтобы он вышел справа как раз в тот момент, когда он уже готов повернуть обратно, т.е. когда он перпендикулярен к зеркалу AB (рис. 141).

Рис. 141


Удобнее, однако, решать задачу с конца, рассматривая ход луча справа налево. Это, очевидно, одно и то же, так как если луч повернуть на 180°, то он в точности повторит путь между зеркалами в обратном порядке.

Итак, введём в систему справа луч 01, перпендикулярный к зеркалу AB и падающий на зеркало CD под углом $\gamma = 0{,}0001°$ (педантичный читатель найдёт, что ещё лучше было бы луч 01 слегка наклонить вправо, на угол чуть-чуть меньше γ, однако мы не будем мелочны, так как от этого число отражений в лучшем случае возрастёт только на единицу). Найдём расположение точек $1'$, 2, $3'$, 4, $5'$, ... вдоль зеркала AB ($1'$, $3'$, $5'$, ... – проекции точек 1, 3, 5, ... на зеркало AB). Приняв точку $1'$ за начало отсчёта, имеем

$$l_1 = d\,\mathrm{tg}\,2\gamma \approx d \cdot 2\gamma\,,$$
$$l_2 = d\,\mathrm{tg}\,2\gamma \approx d \cdot 2\gamma\,,$$
$$l_3 = d\,\mathrm{tg}\,4\gamma \approx d \cdot 4\gamma\,,$$
$$l_4 = d\,\mathrm{tg}\,4\gamma \approx d \cdot 4\gamma\,,$$
$$l_5 = d\,\mathrm{tg}\,6\gamma \approx d \cdot 6\gamma$$

и т.д. Крайняя правая часть формул представляет собой естественное упрощение, так как при столь малом γ с высокой степенью точности $\mathrm{tg}\,\gamma = \gamma$ и даже $\mathrm{tg}\,1000\gamma \approx 1000\gamma$ (здесь γ в радианах). Предполагается, что расстояние между зеркалами везде равно d, несмотря на их непараллельность. При большом d (Гибралтар!) и столь малой непараллельности такое предположение допустимо.

Будем складывать l_1, l_2, l_3, ..., пока их сумма не сравняется при некотором l_i с длиной зеркала $L = 100$ м (очевидно, i будет номером последнего отражения, т.е. максимальным возможным числом отражений; на рис. 141 $i = 11$):

$$L = d(2\gamma + 2\gamma + 4\gamma + 4\gamma + 6\gamma + 6\gamma + \ldots + i\gamma + i\gamma)\,.$$

Отделяя от каждого нечётного слагаемого по одному γ, т.е. отделив всего $\frac{i}{2}\gamma$, мы получаем арифметическую прогрессию (плюс $\frac{i\gamma}{2}$):

$$L = d\left[\gamma + 2\gamma + 3\gamma + \ldots + (i-1)\gamma + i\gamma + \frac{i\gamma}{2}\right] = d\left(i\frac{\gamma + i\gamma}{2} + \frac{i\gamma}{2}\right) = d\gamma\left(\frac{i^2}{2} + i\right).$$

При большом i вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, и тогда

$$i \approx \sqrt{\frac{2L}{\gamma d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{\frac{0{,}0001}{57} \cdot 14\,000}} \approx 90\,,$$

что намного меньше нужной нам тысячи.

Угол α, под которым луч выходит из системы,

$$\alpha = i\gamma = 0{,}009°.$$

Используя ход луча туда и обратно, число отражений можно удвоить (180), но и этого нам мало.

Итак, та фантастически высокая точность, которую каким-то чудом вы получили при установке зеркал, оказывается недостаточной. Особенно ощутимой станет нехватка точности, если вам выдадут вместо стометровых зеркал метровые.

К счастью, есть способ повысить точность. Он опирается не на измерение угла γ, а на непосредственный подсчёт числа полученных отражений. Представьте, что лазер посылает в систему непараллельных зеркал короткий световой импульс (дли-

тельностью в 1 мкс, например). Отразившись неизвестное число раз, импульс возвращается. Число отражений можно определить по времени запаздывания отражённого импульса по отношению к посланному (радиолокация или, точнее, светолокация). Свет проходит в секунду 300 000 км. Если отражённый импульс запоздает, например, на 0,0007 с, то это значит, что он прошёл 210 км, т.е. пересёк Гибралтар 15 раз. Осторожно доворачивая зеркало и следя за возрастающим запаздыванием сигнала, мы можем добиться нужного нам числа отражений.

Чтобы вы не думали, что теперь уже поставить эксперимент ничего не стоит, перечислим хотя бы часть ещё не решённых проблем.

1. До сих пор предполагались идеально плоские зеркала. Но идеального ничего нет. Как исправлять искривления? Может быть, следя за густотой расположения отражений вдоль зеркала и надавливая легонько в нужных местах на обратную сторону зеркала?

2. Наше стометровое зеркало обладает огромной парусностью. Ветер будет его прогибать (и этим портить всю картину), а может и вообще унести. Нужен штиль.

3. Прозрачность атмосферы должна быть такова, чтобы на пути в 14 км поглощалось намного меньше (например, 0,1%), чем при одиночном отражении (6% в предыдущей задаче), иначе это сильно ограничит число отражений. Бывает ли такое состояние атмосферы в Гибралтаре?

4. Если в начале пути луча на зеркале окажется пылинка $П_1$, от которой свет рассеивается в разные стороны (рис. 142), то часть отражённого ею света попадёт на выход напрямик (по пути $П_1 П_2$). А это может обернуться катастрофой для всей идеи измерения скорости расширения Гибралтара.

Рис. 142

В самом деле, если после 100 отражений от сигнала остаётся 0,002, то после 1000 – только $0{,}002^{10} \approx 10^{-27}$. Если от пылинки $П_1$ напрямик на пылинку $П_2$, находящуюся в воздухе, придёт хотя бы одна миллиардная часть энергии, поступившей по прямой $2П_1$, и от пылинки $П_2$ в сторону приёмника B отразится одна миллиардная от этой миллиардной, то это будет всё-таки 10^{18}, т.е. в миллиард раз больше, чем полезный сигнал, претерпевший нужные нам 1000 отражений. Мы можем ошибочно принять этот паразитный сигнал за полезный. Однако его доплеровский сдвиг имеет слабую связь с перемещением континентов: до пылинки было только два полезных отражения.

Если пылинка (или телеграфный столб) $П_2$ неподвижна, то эффект Доплера (и измеренная скорость) будет в сотни раз меньше того, который есть в тысячекратно отражённом луче. А если пылинка $П_2$ сама движется, то, поскольку её скорость наверняка в десятки тысяч раз выше скорости разбегания континентов, результаты измерений могут оказаться самыми неожиданными.

Можно предложить два способа решения проблемы пыли. Первый – перед началом эксперимента обильно полить Африку и Европу из шланга. Второй – поставить между зеркалами экран MN (пунктир на рис. 142), задерживающий рассеянный свет и не мешающий прохождению ломаного отражённого луча. Положение экрана в идеальной системе легко рассчитать, в реальной системе его нужно подбирать экс-

периментально и регулировать на протяжении всего эксперимента. Если вспомнить, что длина экрана более 10 км, то трудно решить, какой из двух способов проще. Видимо, проще всё-таки третий, который предложат читатели[1].

5. До сих пор мы рассматривали идеальный бесконечно тонкий луч. На практике всякий «луч» представляет собой пучок света конечной толщины, причём по мере удаления от источника он, пройдя все фокусирующие устройства, в конце концов неизбежно расширяется. Может оказаться, что, начиная с некоторого номера отражения, соседние пятна света на зеркале начнут перекрываться. В результате в приёмник поступит не чистый сигнал от последнего отражения, а смесь нескольких соседних отражений, имеющих разные доплеровские сдвиги. К счастью, лазер даёт очень тонкий луч света, а с помощью специальной оптики его можно сделать ещё тоньше.

6. Проблема постоянства (стабильности) частоты излучения лазера. Допустим, что Европа и Африка взаимно неподвижны, но частота лазера медленно меняется (причём об этом мы не знаем). Тогда к моменту, когда световой сигнал с частотой f_1, пробежав между зеркалами, придёт в точку приёма, туда же напрямик от лазера поступит сигнал с уже изменившейся частотой $f_2 = f_1 + \Delta f$. Смешав эти два колебания (для выделения разностной частоты), мы получим $f_2 - f_1 = \Delta f$. Не зная, что частота лазера меняется, мы примем эту разностную частоту за доплеровскую, т.е. сделаем ложный вывод, что континенты движутся. Очевидно, чтобы эксперимент был успешным, нужно, чтобы паразитный уход частоты Δf за время пробега луча был значительно меньше ожидаемого доплеровского сдвига. Ожидается, что континенты расходятся со скоростью $v = 3\ \text{см/год} \approx 0{,}001\ \text{мкм/с}$. При 999 отражениях скорость удлинения полного пути луча будет $1000v = 1\ \text{мкм/с}$, что при $\lambda = 0{,}5\ \text{мкм}$ даёт сдвиг частоты на

$$F_D = \frac{1000v}{\lambda} = \frac{1}{0{,}5} = 2\ \text{Гц}\,.$$

Время пробега луча

$$t = \frac{1000R}{c} = \frac{1000 \cdot 14}{300\,000} \approx 0{,}05\ \text{с}\,.$$

За это время частота лазера (если мы хотим хотя бы обнаружить движение) не имеет права уйти более чем на 2 Гц, т.е. за секунду – не более 40 Гц. А если мы хотим не только обнаружить, но и измерить F_D, хотя бы с точностью до 1%, то уход частоты должен быть ещё в 100 раз меньше. Такая стабильность лазеров ещё не достигнута: не так-то просто выдерживать с точностью до долей герца невообразимо высокую частоту лазера $6 \cdot 10^{14}$ Гц!

7. Проблема землетрясения. Не того землетрясения, от которого рушатся стены, а того, которое вызывается проезжающим за 100 км от зеркала мотоциклистом или

[1] Поскольку за 7 лет, прошедших после второго издания, предложений от читателей не поступило, придётся придумывать самому. Например, почему бы не попробовать просто отодвинуть приёмник (точку B на рис. 142) подальше по стрелке? При этом величина сигнала, принимаемого от пылинки Π_2, ослабевает обратно пропорционально квадрату расстояния $B\Pi_2$, а величина полезного сигнала – обратно пропорционально квадрату полного пути луча от лазера до B (по ломаной). Отодвигая, например, приёмник на 100 км, мы увеличиваем расстояние $B\Pi_2$ в тысячи раз и ослабляем помеху в миллионы раз; в то же время расстояние по ломаной, измеряемое тысячами километров, практически не меняется, и поэтому полезный сигнал из-за лишних 100 км почти не ослабевает. Вспомните задачу «Двухпозиционная локация», в которой мы отодвигали Луну, и сравните Луну с пылинкой.

набегающими на берег волнами (колебания зеркал на тысячную долю микрометра в секунду).

8. Десятки других проблем, которые возникнут, как только этим экспериментом займутся вплотную.

93. Шар

А

На полированный металлический шар слева падает параллельный однородный пучок света. Допустим, что шар полностью отражает световые лучи. Куда больше отразится света: влево или вправо?

Б

Обычно сначала недоумевают: как вообще лучи могут отразиться вправо, если справа находится шар? Чтобы рассеять недоумения, приводим рис. 143, на котором построены два отражённых луча. Луч AB после отражения пошёл влево, по направлению BC, луч DE – вправо, по EF. Построение отражённого луча просто. Строится перпендикуляр к зеркалу в точке падения (OBG и OEF). Перпендикуляром к поверхности шара является радиус шара и его продолжение. Затем строится угол отражения (GBC и HEF), равный углу падения (ABG и DEH).

Рис. 143

Итак, шар действительно отражает и вправо, и влево. Но куда больше? Ответить на вопрос будет легко, если вы сначала построите те лучи, которые отражаются как раз не вправо и не влево, а вверх и вниз. Тогда вы разделите весь световой поток на два: отражаемый влево и отражаемый вправо, – и вам останется лишь сравнить их.

В

На рис. 144 приводится подсказанное выше построение. Найдём точку B, от которой падающий слева луч AB отражается точно вверх (BC). Угол ABC равен 90°. Но он является суммой углов падения и отражения, а последние равны друг другу, следовательно, каждый из них равен 45°. Значит, точку B можно найти как точку, в которой перпендикуляр к поверхности шара составляет угол 45° с направлением падения лучей. Это радиус OB. Аналогично находим точку E, от которой луч отражается точно вниз.

Рис. 144

Легко сообразить, что плоскость, проходящая через точки B и E перпендикулярно к направлению падения лучей (плоскость $CBKEF$), делит шар на две неравные части, одна из которых (левая) отражает лучи влево, вторая (правая) – вправо.

Сколько же падает лучей на левую и правую части шара? Всего на шар падает лучей столько, сколько их проходит через круг 1, радиус которого равен радиусу шара R. Разрежем этот круг на две части: малый круг 2 с радиусом, равным

$$r = BK = R\sin 45° = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

и кольцо 3. Тогда из всех падающих на шар лучей на левую часть упадёт количество, пропорциональное площади круга 2, на правую – пропорциональное площади кольца 3 (так как пучок лучей по условию однородный).

Площадь круга 1

$$S_1 = \pi R^2 .$$

Площадь круга 2

$$S_2 = \pi r^2 = \pi\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{S_1}{2},$$

т.е. площадь круга 2 составляет половину площади круга 1. Значит, на кольцо 3 останется вторая половина площади круга 1.

Таким образом, на часть шара, отражающую влево, падает столько же света, сколько и на часть, отражающую вправо. А поскольку по условию отражается всё, что падает, то шар влево и вправо отражает одинаково.

Из соображений симметрии следует, что в верхнюю и нижнюю полусферы шар отражает тоже одинаково. Это же верно для полусфер над и под чертежом. Чуть-чуть усложнив доказательство (взяв вместо 45° произвольный угол α), мы можем убедиться, что шар обладает интересным свойством отражать совершенно одинаково не только по всем полусферам, но и вообще по всем направлениям.

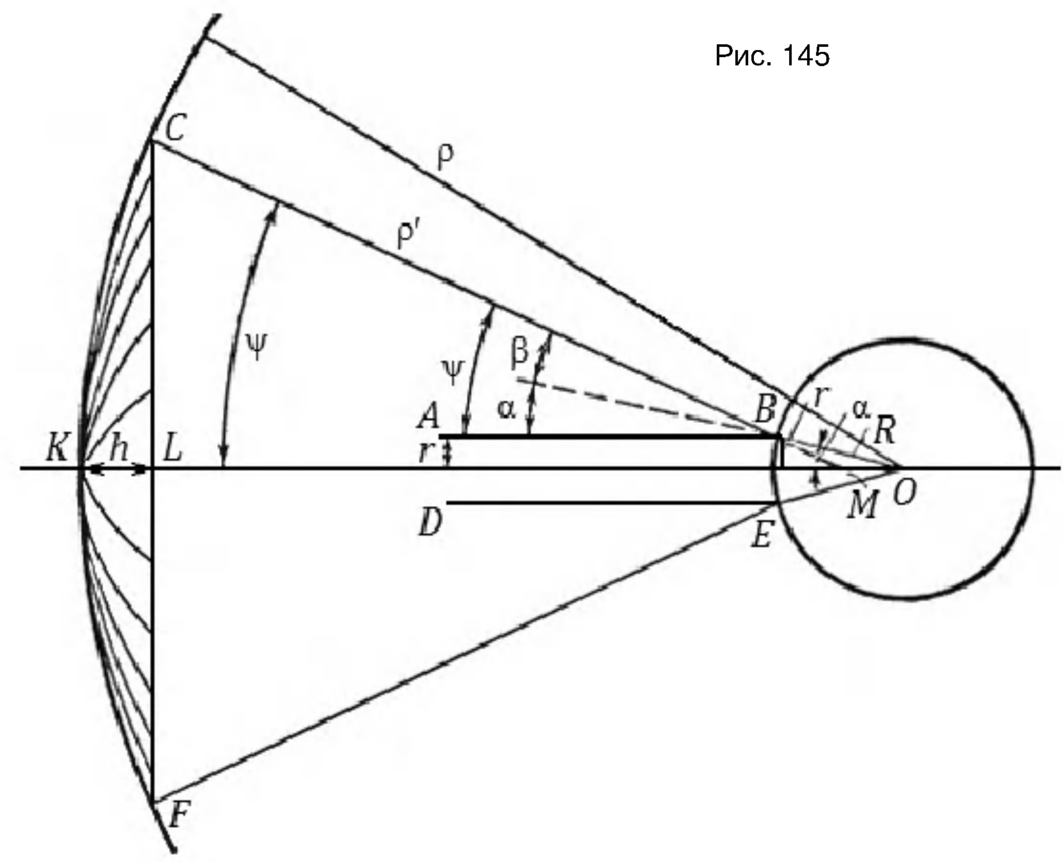


Рис. 145

На рис. 145 показан шар, облучаемый однородным цилиндрическим пучком с некоторым радиусом r. Окружим шар радиуса R сферой радиуса $\rho \gg R$. Крайний луч AB пучка падает на шар под углом α и отражается под углом $\beta = \alpha$, пересекая сферу в точке C. Аналогично, луч DE после отражения пересекает сферу в точке F.

Падающий цилиндрический пучок радиуса r после отражения превращается в конический с углом между образующей и осью $\psi = \alpha + \beta = 2\alpha$. Этот конус лучей освещает круговой участок сферы CKF (заштрихован отрезками «меридианов»).

Прежде чем начинать доказательство, сделаем важную оговорку. Сфера CF построена концентрично с шаром (общий центр O), и поэтому луч BC, не проходящий через центр O, строго говоря, не перпендикулярен сфере. Поэтому для сферы конечного радиуса ρ доказательство равноправия всех направлений будет не совсем строгим. Однако само понятие направления всегда отождествляется с точкой на небесной сфере, т.е. бесконечно удалённой ($\rho = \infty$). Для такой сферы безразлично, что считать центром: точку O или отражающую точку B поверхности шара. Следовательно, можно считать $\rho' = \rho$ (см. рис. 145). На практике всегда $\rho \gg R$ (например, в радиолокации может быть $\rho = 1000$ км, $R = 1$ м), и поэтому наше решение будет практически точным.

Найдём связь между сечением падающего потока лучей s_1 и площадью освещаемого участка сферы s_2. Сечение цилиндра

$$s_1 = \pi r^2 = \pi R^2 \sin^2 \alpha \ ;$$

s_2 есть боковая поверхность шарового сегмента CKF:

$$s_2 = 2\pi\rho h\,,$$

где h – высота сегмента, равная

$$h = KL = KO - LO = \rho - \rho\cos\psi = \rho(1 - \cos 2\alpha) = 2\rho\sin^2\alpha\,.$$

Отношение площадей

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\pi R^2 \sin^2\alpha}{2\pi\rho \cdot 2\rho\sin^2\alpha} = \frac{R^2}{4\rho^2}\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Собственно говоря, на этом доказательство заканчивается. Мы уже видим, что это отношение не зависит от ψ (т.е. от α или от r). Это значит, что, увеличивая s_1 (и пропорциональный ей падающий поток), мы во столько же раз увеличиваем s_2, т.е. ту площадь, на которую этот поток рассеивается; поэтому освещённость прибавляющегося участка сферы оказывается такой же, как и освещённость первоначального. Впрочем, формальное доказательство этого факта не повредит.

Увеличим r на Δr. Тогда s_1 возрастает на Δs_1 и s_2 – на Δs_2. Новое отношение площадей будет равно той же величине, поскольку ни r, ни Δr в формулу **(1)** не входят:

$$\frac{s_1'}{s_2'} = \frac{s_1 + \Delta s_1}{s_2 + \Delta s_2} = \frac{R^2}{4\rho^2}\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Вычитая формулу **(1)** из **(2)**, получаем

$$\frac{s_1 + \Delta s_1}{s_2 + \Delta s_2} - \frac{s_1}{s_2} = 0\,,$$

откуда после простых преобразований имеем

$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{R^2}{4\rho^2}\,.$$

Это и доказывает, что на новой площадке Δs_2 освещённость будет такая же, как и на

старой s_2, если плотность падающего потока на новой площадке Δs_1 такая же, как и на старой s_1, т.е. если падающий поток однороден.

Неоднородность в падающем потоке приведёт, конечно, к соответствующей неравномерности в освещении сферы. В частности, если в падающий поток внести экран определённой формы, то такой же формы тень появится в соответствующем месте сферы. Любопытно, что угловые размеры этой тени для наблюдателя, совмещённого с центром шара, будут одними и теми же независимо от радиуса сферы ρ, а также от расстояния экран–шар.

Наиболее частое возражение против изложенного состоит в том, что за шаром имеется цилиндрическая тень с сечением πR^2, которую нельзя замаскировать никакими теоретическими выкладками. Да, это верно, но угловые размеры этой тени на сфере бесконечно большого радиуса равны нулю. Таким образом, можно утверждать, что освещённость на сфере одинакова на всём бесконечном множестве её точек, кроме одной. На практике даже эта точка будет освещена, если учесть дифракцию лучей вокруг шара, их искривление в поле тяжести шара (следствие общей теории относительности Эйнштейна) и др. Однако все эти явления – вне рамок нашей задачи, и попытка взять их на вооружение выглядела бы как увёртка. С чувством некоторой досады мы должны признать, что, оставаясь в рамках геометрической оптики (что для нашей задачи означает прямолинейность лучей), мы не можем избавиться от этой занозы – одной неосвещённой точки. К тому же, если ρ конечно, то и угловые размеры тени конечны. Собственно, этот дефект и оговорённая ранее нецентральность точки отражения – две стороны одной медали.

Способность шара при $\rho \gg R$ отражать совершенно одинаково по всем направлениям делает шар очень удобной эталонной целью для радиолокации: отражённые от шара сигналы одинаково обнаруживаются с любого направления, независимо от того, с какой стороны облучается шар. Созданы искусственные спутники Земли в виде огромных надувных шаров с металлизированной поверхностью. Эти спутники рассеивают равномерно по всем направлениям сигналы, посылаемые с Земли. Благодаря большой высоте спутников отражённые от них сигналы принимаются на большой территории, что удобно для телевизионного вещания и связи.

94. Куда надо и когда надо

А

Все вы видели красный задний велосипедный «фонарь». Он обладает чудесным свойством: несмотря на отсутствие в нём лампочки, он светит, причём светит не всё время и не по всем направлениям, а тогда, когда надо, и туда, куда надо. Когда ночью велосипедиста догоняет автомашина и освещает его своими фарами, то этот «фонарь» отражает свет точно к автомашине и никуда больше. Шофёр видит яркий красный свет «фонаря» и принимает меры к тому, чтобы не наехать на велосипедиста. А как устроен этот «фонарь»?

Б

Внимательно приглядевшись к «фонарю» (рис. 146*а*), вы увидите, что весь он состоит из равносторонних треугольников, каждый из которых (рис. 146*б*) разбит

биссектрисами ещё на три треугольника. Приглядевшись к равностороннему треугольнику ещё внимательнее, вы заметите, что это вовсе не треугольник, а пирамида. Каждая пирамида состоит из трёх взаимно перпендикулярных зеркал. Такая комбинация зеркал называется уголковым отражателем. Четвёртая грань пирамиды – основание – обращена к наблюдателю и прозрачна для красных лучей.

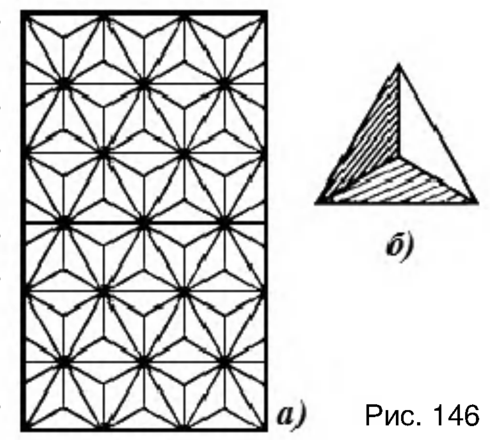


Рис. 146

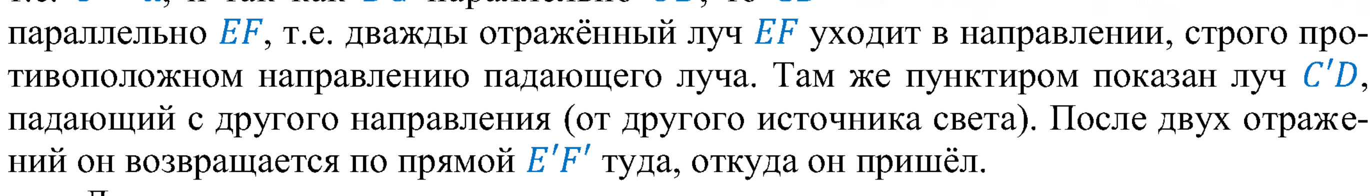
Очевидно, достаточно рассмотреть один уголковый отражатель. Нужно доказать, что он меняет направление света на строго противоположное независимо от того, с какого направления свет падает. Советуем начать доказательство с более простого случая двух взаимно перпендикулярных зеркал и луча, падающего на них в плоскости, перпендикулярной к обоим зеркалам.

B

Рис. 147

На рис. 147 показаны два зеркала OA и OB, перпендикулярные друг к другу и к плоскости чертежа. Падающий луч CD лежит в плоскости чертежа. Прямая GD – перпендикуляр к зеркалу OA, GE – к OB. Поэтому $ODGE$ – прямоугольник, угол DGE – прямой, треугольник DEG – прямоугольный, сумма его острых углов $\beta + \gamma = 90°$. Луч падает на зеркало OA под углом α и отражается под углом $\beta = \alpha$, затем падает на зеркало OB под углом γ и отражается под углом $\delta = \gamma$. Поскольку угол $\varepsilon = 90° - \delta$, то из приведённых выше равенств следует

$$\varepsilon = 90° - \delta = 90° - \gamma = \beta = \alpha,$$



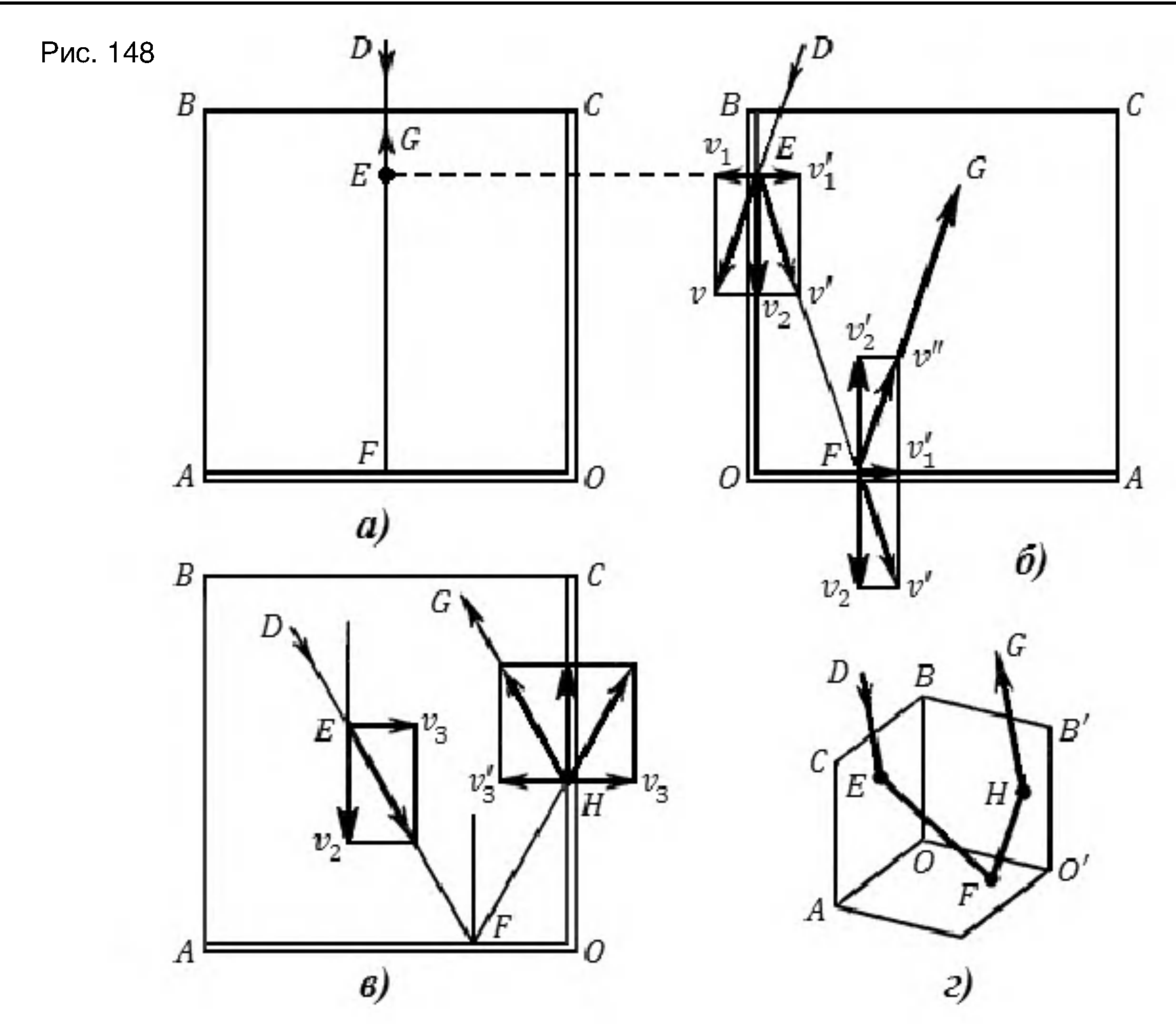
т.е. $\varepsilon = \alpha$, и так как DG параллельно OB, то CD параллельно EF, т.е. дважды отражённый луч EF уходит в направлении, строго противоположном направлению падающего луча. Там же пунктиром показан луч $C'D$, падающий с другого направления (от другого источника света). После двух отражений он возвращается по прямой $E'F'$ туда, откуда он пришёл.

Доказательство для системы с тремя зеркалами несколько сложнее: стереометрия сложнее планиметрии. На рис. 148*а* и *б*, показан уголковый отражатель из трёх квадратных зеркал в двух проекциях: ***а*** – вид спереди, зеркала́ A и C перпендикулярны к плоскости чертежа, зеркало B лежит в плоскости чертежа; ***б*** – вид слева, зеркало C теперь лежит в плоскости чертежа, зеркала́ B и A видны с ребра.

Чтобы помочь нашему пространственному воображению, будем рассматривать поведение одного из фотонов падающего луча. Испытаем новый метод доказательства сначала на уже рассмотренном случае, когда третье зеркало бездействует. Фотон падает на зеркало B (рис. 148*б*) по прямой DE со скоростью v и, как мячик, отражается по прямой EF, отчего его скорость меняется по направлению.

Разложив скорость v на составляющие v_1 и v_2, перпендикулярную и параллельную зеркалу, мы видим, что зеркало меняет направление перпендикулярной состав-

Рис. 148



ляющей v_1 на противоположное (v_1'), оставляя неизменной параллельную составляющую v_2. Скорость отражённого фотона v есть результат сложения неизменной v_2 и изменившейся v_1'. Второе зеркало в точке F аналогично изменяет направление второй составляющей v_2 (которая была параллельна первому зеркалу, но оказалась перпендикулярной ко второму).

В результате двух отражений обе составляющие v_1 и v_2 вектора v изменили направления на противоположные, отчего и результирующий вектор изменил своё направление на противоположное, и фотон улетает по прямой FG, параллельной первоначальному пути DE. Третья составляющая скорости в этом случае была равна нулю: как видно из второй проекции (рис. 148*а*), фотон летел параллельно зеркалу C по пути DE, отразился в точке E, полетел к зеркалу A (опять параллельно C), отразился в точке F и полетел обратно по пути FG (опять-таки параллельно C).

Если бы, однако, у фотона была и третья составляющая скорости v_3, перпендикулярная к третьему зеркалу (рис. 140*в*, дающий проекцию такую же, как и рис. 140*а*), то фотон, отразившись в точках E и F от двух зеркал, полетел бы и к третьему (точка H), которое изменило бы направление третьей составляющей v_3 на обратное v_3'. Таким образом, каждое из трёх отражений (E, F и H) привело бы к перевороту соответствующей составляющей вектора скорости фотона, и он улетел бы в направлении, строго противоположном первоначальному. На рис. 140*г* показан этот общий случай отражения от трёх зеркал уголкового отражателя.

Вы можете возразить, что если «фонарь» велосипеда освещается автомобильной фарой, то отражённый луч должен вернуться в фару, а не в глаза шофёра. Так было бы, если бы все уголковые отражатели были идеальными, т.е. все три зеркаль-

ца каждого «уголка» были строго взаимно перпендикулярны. Малейшие отступления от перпендикулярности приводят к некоторому разбросу отражённого луча, что и позволяет шофёру увидеть свет «фонаря». Заметим, однако, что направления от «фонаря» на фару и на глаза шофёра мало различаются, когда расстояние до велосипедиста намного больше, чем расстояние между фарой и шофёром.

Уголковые отражатели находят широкое применение. Они используются и в задних «фонарях» автомашины, и в дорожных знаках, где они, вспыхивая ярким красным светом в лучах фары, дают те или иные указания шофёру.

Не менее интересные применения уголковые отражатели (УО) находят в радиолокации: посланная радиолокатором волна отражается от УО точно назад в радиолокатор, не рассеиваясь во все стороны, благодаря чему сигнал, отражённый от УО, можно обнаружить на огромных расстояниях. Поэтому УО может отмечать характерные точки местности, по ним можно проверять правильность работы радиолокатора. УО можно расставить на речных и морских мелях. Штурманы будут отчётливо видеть мели на экранах своих радиолокаторов. УО могут применяться и против радиолокации: сброшенный с самолёта УО даёт отражённый сигнал больший, чем самолёт, радиолокатор начинает следить за этой приманкой, а самолёт тем временем старается уйти.

«Уголками» могут снабжаться космические корабли, что позволит следить за ними с помощью радиолокаторов на огромных расстояниях. Имеются проекты искусственного спутника Луны в виде уголкового отражателя.

В журнале «Mercury» (1974, № 5) К.У. Андерсон делает смелое предположение, что внеземные цивилизации (ВЦ) могли миллионы лет назад дать знать о себе, прислав в Солнечную систему свои УО, которые не разрушились до сих пор. По его расчётам УО диаметром 1 км в районе Нептуна даёт для радиолокатора такой же по величине отражённый сигнал, как и планета Меркурий, уже «обнаруженная» радиолокацией. Читателей, не располагающих радиолокатором, наверняка заинтересует, что такие УО могли бы обнаруживаться и невооружённым глазом. Роль передатчика может выполнить Солнце. Правда, в силу свойств УО отражённый сигнал должен возвращаться в источник, т.е. к Солнцу, мимо Земли и наших глаз. Но если Земля попадает на прямую Солнце–УО, то мы должны обнаружить УО в виде точки-звезды (яркость её пульсирует, если УО вращается). Во-первых, потому, что сигнал к УО и обратно идёт много минут и Земля, пропустив прямой луч Солнца к УО, успевает передвинуться и перехватить луч, возвращающийся от УО. А во-вторых, тень Земли не затмевает (в отличие от задачи «Полная Луна») «уголок», выведенный на орбиту между Марсом и Юпитером: с этого расстояния Земля видна как «точка», не способная заслонить весь солнечный диск.

Расчёт показывает, что если этот УО запущен вокруг Солнца в плоскости эклиптики на расстоянии $3 \cdot 10^8$ км от Солнца, то он с Земли будет виден как звезда 4-й величины, т.е. доступен невооружённому глазу (стометровый – 9-й величины, доступен школьному телескопу). Для этого он должен находиться в точке эклиптики, строго противоположной Солнцу, и угадать заранее момент противостояния мы не можем. Поэтому наблюдения должны вестись каждую ночь (в местную полночь – строго на юге, с вечера – соответственно левее), в течение 565 суток (таков синодический период обращения «уголка» – время от одного противостояния до другого). Продолжительность видимости «уголка» может достигать 4 часов.

Массивный Юпитер за многие годы мог бы заметно «расшатать» такую орбиту УО. Поэтому ВЦ выведет его скорее в плоскость орбиты не Земли, а Юпитера, где орбита УО будет устойчивее. Эта орбита будет пересекать эклиптику под углом 1,3°, и теперь искать круглый год бессмысленно. Когда УО отходит от эклиптики более чем на 0,07°, его «зайчик» не попадёт на Землю. Искать нужно вблизи узлов (точек пересечения орбиты УО с эклиптикой), т.е. вблизи точек, противостоящих Солнцу в начале января (идёт по Близнецам) и в начале июля (по Стрельцу).

Нерешённые проблемы: мы не знаем, умеет ли ВЦ делать УО размером 1 км с идеальной точностью (до долей микрометра); мы не знаем, насколько бомбардировка метеорной пылью за века́ попортила зеркала́ УО. И главное, мы не знаем, существуют ли вообще эти УО, так как ещё не знаем, существуют ли сами ВЦ (об этом – в задачах «Спортлото и жизнь на других планетах», «Свидание под часами», «Пароль разума», «Расписание связи с внеземными цивилизациями», «Ищи под фонарём!»). Поэтому, обнаружив УО, надо убедить в этом и других: не только срочно дать телеграмму, но и сделать документ – кинофильм.

В 1971 г. на Луне в Море Дождей успешно действовал советский «Луноход-1» с французским УО на борту. УО состоит из многих «уголков», являющихся как бы отрезанными от стеклянного куба углами. Луч лазера, посылаемый из Франции на «Луноход-1», возвращается во Францию, посылаемый из Крыма – в Крым. Можете послать луч и вы – и он вернётся точно к вам (и никуда больше!). Этот эксперимент позволил уточнить характер движения Луны, решить многие задачи геодезии и селенодезии.

Ещё любопытнее проект космического светотелефона, основанный на использовании УО. С Земли на космический корабль посылается световой луч лазера. Сквозь прозрачный иллюминатор луч попадает на УО, сделанный из упругих тонких зеркал, и, отразившись, возвращается в точку отправления. Если космонавт молчит, то вернувшийся на Землю луч имеет постоянную интенсивность. Если же космонавту нужно передать что-либо на Землю, он говорит, повернувшись к УО, как к микрофону. Упругие зеркала́ УО начинают вибрировать, отчего углы между зеркалами начинают слегка меняться в такт с передаваемым сигналом. Отступление углов от 90° расстраивает УО, он начинает рассеивать свет широким пучком, отчего количество света в направлении к точке приёма уменьшается. Световой поток, принимаемый на Земле, оказывается меняющимся в такт с речью космонавта (модулирован по амплитуде). С помощью специального детектора эти колебания можно превратить в электрические, усилить и подать на громкоговоритель.

Во время передачи с Земли луч лазера, модулированный по интенсивности передаваемыми сигналами, своим световым давлением[1] заставит УО вибрировать, и чтобы услышать Землю, космонавту достаточно повернуть к УО ухо. Любопытно, что при таком способе связи практически вся аппаратура и источники питания находятся на Земле, а бортовая часть аппаратуры состоит всего лишь из УО, что сводит к минимуму вес и габариты, даёт экономию энергии на борту и обеспечивает высокую надёжность.

[1] Световым давлением заставить «уголок» вибрировать значительно труднее, чем звуковым, поэтому данную идею можно рассматривать пока лишь как принципиальную возможность.

95. Кванты в кастрюле

А

Кастрюля диаметром 20 см и высотой 15 см выставляется на свет так, что дно её перпендикулярно к лучам. Каждую секунду внутрь попадает два миллиарда квантов. Спустя минуту кастрюля мгновенно закрывается крышкой. Сколько квантов оказываются захлопнутыми внутри?

Б

Кое-кто из вас вспоминает, что в детстве он уже смеялся над чудаком из сказки, который подобным образом пытался запасти в горшке свет на чёрный день. Не надо смеяться: чудаки движут науку. Это был наивный, но тем не менее вполне научный эксперимент. Хотя и интуитивно, но экспериментатор исходил из достаточно здравой гипотезы, которую впоследствии назвали законом сохранения энергии. Результат эксперимента оказался почему-то отрицательным, но отрицательные результаты тоже движут науку вперёд, если из них делаются должные выводы. Не назовёте же вы чудаком Галилея за то, что для измерения скорости света он предложил послать луч с одной горы на другую, зажечь фонарь на второй горе в момент прихода туда света с первой и мерить на первой горе время между моментами отправления сигнала и возврата ответного. Идея была правильной, сейчас на ней держатся радио- и светолокация. Галилей потерпел неудачу только потому, что точность его приборов была слишком малой. Может быть, и у нашего чудака опыт не удался по той же причине?

Пристыдив таким образом шутников, приступим к делу.

Сразу же отметаем, как абсурдный, ответ, что за 60 с накопится 120 млрд. квантов. Квант не может покоиться. Он остаётся квантом, только пока движется со световой скоростью. Число квантов в кастрюле не зависит от того, освещаем ли мы её минуту или год.

Вторая крайность – в кастрюле ничего нет – тоже абсурдна. По крайней мере в первое мгновение, пока кванты не поглотились материалом кастрюли, там будет некоторое их количество. Но сколько? Интуитивно ожидается, что их там будет миллион-другой или, на худой конец, тысчонка; что число это тем больше, чем больше площадь дна кастрюли, и не зависит от её высоты.

Подсказка состоит в том, что искомое число квантов определяется именно высотой.

В

Решим сначала задачу для абсолютно чёрной кастрюли, которая всё поглощает и ничего не отражает. Кванты, излучаемые самим сосудом, в расчёт не принимаем (чтобы они не мешали, можно охладить кастрюлю до абсолютного нуля). Квант, падающий на дно, немедленно исчезает из нашей задачи (так как превращениями кванта внутри материала дна мы заниматься не будем). Следовательно, в сосуде будут захлопнуты только те кванты, которые успели проскочить крышку, но ещё не достигли дна.

Свет проходит в секунду 300 000 км. Следовательно, два миллиарда квантов рассредоточены в объёме цилиндра, высота которого равна 300 000 км, а основанием является дно кастрюли.

Захлопывая кастрюлю, вы отсекаете от этого цилиндра маленький цилиндрик, высотой которого теперь является высота кастрюли. Пятнадцать сантиметров в 2 млрд. раз меньше трёхсот тысяч километров. Значит, и квантов в кастрюле будет в 2 млрд. раз меньше, или всего… один квант![1] Поразительно мало. А через одну двухмиллиардную секунды квант наверняка достигнет дна, и в кастрюле наступит темнота.

Впрочем, чего другого можно было ожидать от абсолютно чёрной кастрюли? Ещё до закрывания крышкой в ней не было видно ни зги, так как видеть что-либо можно только при условии, что этим предметом излучаются или отражаются световые кванты. Вот уж в абсолютно белом сосуде квантов будет полным-полно! Оказывается, нет! Возьмём для простоты кастрюлю с полированным дном, отражающим зеркально. Тогда в абсолютно белой[2] кастрюле квантов будет в среднем только вдвое больше, чем в абсолютно чёрной: к квантам, идущим в одну сторону, прибавится столько же, идущих после отражения в обратном направлении. Правда, существенно новым будет то обстоятельство, что если крышка тоже абсолютно белая, то эти два кванта будут существовать внутри вечно.

Интересно, что абсолютно белую кастрюлю (с зеркальным дном) в условиях нашей задачи тоже увидеть невозможно. Стенки, не облучаемые потоком, перпендикулярным ко дну, выглядели бы чёрными. Сверкала бы только одна точка дна, от которой отражённые кванты попадают в глаз. Но для этого глаз нужно расположить на пути падающих лучей. При этом наблюдатель заслонил бы падающий свет и поэтому ничего бы не увидел (правда, если бы наблюдатель умудрился своей головой заслонить кастрюлю мгновенно, то к нему из кастрюли пришли бы два кванта, но вряд ли они попали бы ему в глаза, так как площадь щёк и носа больше площади глаз). Для любого наблюдателя, находящегося в стороне, дно и стенки казались бы абсолютно чёрными.

Несколько больше квантов будет в белой матовой кастрюле: от матовой поверхности квант отражается куда придётся, в том числе и на стенки, а от стенок тоже отражается в случайном направлении. Так он может путаться внутри довольно долго, пока случайно не выскочит из сосуда. Поскольку путь при этом удлиняется, то возрастает и его время пребывания внутри, а следовательно, и число квантов, одновременно пребывающих в кастрюле и захлопываемых там.

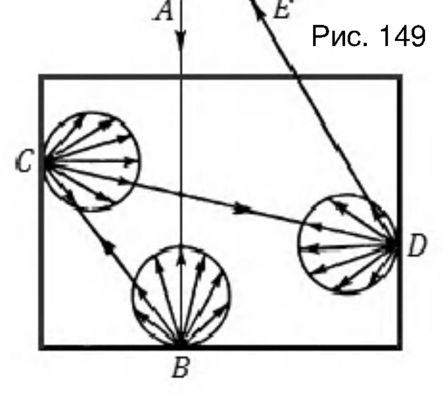


Рис. 149

На рис. 149 показана судьба одного из квантов, пришедшего по прямой AB. Векторы, исходящие из точки B, в некотором масштабе показывают вероятность отраже-

[1] Эта цифра верна только в среднем. Кванты в кастрюлю поступают беспорядочно; поэтому может получиться, что вы захлопнете в ней 0, 1, 2, 3 и т.д. квантов с вероятностью тем меньшей, чем больше число квантов.

[2] Под абсолютно белой мы понимаем поверхность с коэффициентом отражения, строго равным единице.

ния кванта по разным направлениям в случае матовой поверхности. Дальнейший путь кванта случаен. Например, он может уйти из сосуда после трёх отражений в точках B, C и D.

Нетрудно представить сложности вычисления точного числа квантов внутри такого сосуда. Однако ориентировочно это число можно оценить по отношению площади поверхности кастрюли к площади отверстия: именно этим отношением определяется вероятность ухода кванта из сосуда (для шарообразного сосуда это было бы точнее, чем для цилиндрического). Вероятнее всего, что в этой кастрюле удастся захлопнуть 1-7 квантов: 0-2 прямых и 1-5 отражённых.

Отметим в заключение, что 2 млрд. квантов в секунду – это слишком малая величина. Освещённость, создаваемая ими в нашей кастрюле, в 20 раз слабее освещённости, создаваемой звёздным безлунным небом. Полная Луна посылала бы в кастрюлю около $2 \cdot 10^{13}$ квантов в секунду.

96. Пополам не делится

А

Пустотелый шар с внутренним диаметром 1 мм, абсолютно белый внутри, с абсолютно прозрачным воздухом, заполнен светом (с длиной волны $\lambda = 0{,}555$ мкм) так, что освещённость внутри равна 0,2 люкса (такую освещённость создает полная Луна). Сколько квантов надо убрать, чтобы освещённость внутри шара упала вдвое?

Б

Конечно, нужно убрать половину всего числа квантов. Но соль не в этом, а в том, сколько именно. Надо вычислить, сколько их там всего, и разделить пополам.

Напомним данные, необходимые для расчёта. Один люкс (лк) – это один люмен на квадратный метр. Один ватт лучистой энергии на волне 0,555 мкм равен 683 люменам (лм) светового потока. Энергия ε одного кванта равна произведению частоты ν на постоянную Планка h,

$$\varepsilon = h\nu\,,$$

где $h = 6{,}6 \cdot 10^{-27}$ эрг · с $= 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}}{0{,}555 \cdot 10^{-6}} = 5{,}4 \cdot 10^{14}\ \text{Гц}\,.$$

В

Итак, надо определить число квантов внутри шара. Энергия одного кванта

$$\varepsilon = h\nu = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 5{,}4 \cdot 10^{14} \approx 3{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}\,.$$

Освещённость в 1 люкс свяжем с джоулями:

$$E = 1\ \text{лк} = 1\ \frac{\text{лм}}{\text{м}^2} = \frac{1\ \text{Вт}}{683\ \text{м}^2} = \frac{1}{683}\,\frac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{м}^2}\,.$$

Эта освещённость даёт n квантов в секунду на квадратный метр:

$$n = \frac{E}{\varepsilon} = \frac{1}{683 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-19}} = 4 \cdot 10^{15}\ \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2}\,.$$

При $E_1 = 0{,}2$ лк

$$n_1 = 8 \cdot 10^{14}\ \frac{1}{\text{с} \cdot \text{м}^2} = 8 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{\text{с} \cdot \text{см}^2}.$$

Теперь подойдём к задаче с другого конца.

В абсолютно белом шаре поглощение отсутствует, все кванты отражаются. Найдём, сколько раз в секунду отразится внутри нашего шара один квант, если он бегает вдоль диаметра шара. Для этого скорость кванта следует разделить на этот диаметр:

$$m = \frac{c}{d} = \frac{3 \cdot 10^{11}\ \text{мм/с}}{1\ \text{мм}} = 3 \cdot 10^{11}\ \text{с}^{-1}.$$

Если учесть, что в случае матовой поверхности квант отражается в самых произвольных направлениях, то число отражений будет ещё больше: всякая хорда короче диаметра, время пролёта по хорде меньше, чем по диаметру. Следовательно, вычисленное нами m – это минимально возможное число ударов кванта в секунду о внутреннюю поверхность шара. Чтобы не осложнять себе расчётов, удовлетворимся этим числом, памятуя, что на самом деле оно несколько больше.

Сколько же раз в секунду наш одиночный квант падает на площадь в $1\ \text{см}^2$?

Внутренняя поверхность шара равна

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2 = 3{,}14 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}0314\ \text{см}^2.$$

Искомое число

$$n_2 = \frac{m}{S} = \frac{3 \cdot 10^{11}}{0{,}0314} \approx 10^{13}\ \frac{1}{\text{с} \cdot \text{см}^2}.$$

Сравнив n_2 и n_1, мы обнаруживаем, что

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{10^{13}}{8 \cdot 10^{10}} = 125,$$

т.е. квант попадает каждую секунду на каждый квадратный сантиметр поверхности в 125 раз чаще, чем это требуется для создания освещённости в 0,2 лк. Значит, один квант внутри нашего шара создаст освещённость в 125 раз бóльшую, чем полная Луна! 25 люксов! Причём не на мгновение, не на час, а на вечность. Это как раз та освещённость, при которой мы обычно читаем книгу вечером за письменным столом.

Этот результат настолько неожидан, что хочется ещё раз проверить расчёты: уж не ошиблись ли мы? И автор несколько раз это делал, но так и не нашёл ошибки. Поэтому он вынужден смириться с этим парадоксом, но вас к этому не принуждает. Считайте сами!

Оставляя вопрос о том, можно ли читать с помощью одного-единственного кванта, на будущее, вернёмся к условию задачи.

Итак, для того чтобы внутри шара освещённость равнялась 0,2 лк, нужно, чтобы там было всего лишь $^1/_{125}$ кванта. Но квант может быть только целым. Значит, такая освещённость невозможна! Тем более невозможно уменьшить её вдвое. Выходит, что освещённость внутри шара может быть либо нуль (полная темнота), либо 25 лк (один квант), либо 50 лк (два кванта) и т.д. Промежуточные градации невозможны. Причём при освещённости 25 лк свет в шаре может быть только цветным (в нашем случае жёлтым), но не белым: белый свет представляет собой смесь многих цветов и требует для своего создания по крайней мере трёх разноцветных квантов, что даст освещённость больше 25 лк.

Поистине прав Прутков, воскликнувший однажды: *«Глядя на мир, нельзя не удивляться!»*

97. Внутри футбольного мяча

А

Раздуем шар из предыдущей задачи до размеров футбольного мяча ($D = 30$ см). Поскольку внутренняя поверхность от этого возросла, то при том же числе квантов n внутри шара освещённость уменьшится. Во сколько раз?

Б

Так и хочется сказать, что освещённость обратно пропорциональна освещаемой площади, т.е. уменьшится в $300^2 = 90\,000$ раз. Но освещённость определяется не просто числом квантов на единицу площади, а числом, приходящимся на единицу площади *в секунду*.

В

Следует учесть ещё, что путь кванта между столкновениями увеличится в 300 раз. Поэтому столкновения со стенками будут в 300 раз реже. А площадь стенок в 300^2 раз больше: Следовательно, от обеих причин освещённость уменьшится в

$$\left(\frac{D}{d}\right)^3 = 300^3 = 27 \text{ млн. раз},$$

т.е. ровно во столько раз, во сколько увеличился объём шара.

Для сохранения той же освещённости нужно было бы увеличить во столько же раз число квантов; иными словами, число квантов в единице объёма (объёмная плотность энергии) должно оставаться постоянным.

Внутри нашего мяча возможные градации освещённости идут уже в 27 млн. раз гуще: после полной темноты ближайшее возможное значение освещённости составляет около одной миллионной люкса.

Интересно изменить размеры шара также и в другую сторону: при диаметре шара 0,01 мм один квант создавал бы освещённость 25 млн. люксов, что в 250 раз больше освещённости, создаваемой Солнцем в полдень (в средних широтах). Это ослепляло бы наблюдателя, но уменьшить освещённость на какой-либо процент было бы невозможно: её можно было бы уменьшить только скачком до нуля, убрав этот единственный квант.

Впрочем, кажется, есть способ сделать пребывание наблюдателя внутри шара терпимым: надо заменить жёлтый квант на красный или фиолетовый. Чувствительность глаза к разным цветам (относительная видность) различна и убывает к краям видимого спектра. Например, при $\lambda = 0{,}42$ мкм она составляет только 0,004 от чувствительности при $\lambda = 0{,}555$ мкм, т.е. фиолетово-синий квант действовал бы приблизительно в 250 раз слабее, чем жёлтый (несмотря на то, что, в соответствии с выражением $\varepsilon = h\nu$, он немного энергичнее жёлтого). Правда, автор не уверен, что такой фиолетовый мир окажется приемлемым для наблюдателя.

Назревающий у вас протест против присутствия наблюдателя внутри наших шаров будет рассмотрен в следующей задаче.

98. Квант и наблюдатель

А

В чудеса со слов верится плохо, их надо увидеть собственными глазами. Поэтому возьмём шар из предыдущей задачи (жёсткий, абсолютно белый внутри, с внутренним диаметром 30 см), прорежем в нём круглую дырочку диаметром 5 мм, т.е. как раз такую, чтобы к ней можно было снаружи приложиться зрачком глаза. Дырочка закрыта абсолютно белой задвижкой. Откроем задвижку и заглянем. Что мы увидим?

Рассмотрим два случая:

а) внутри шара один-единственный квант;

б) 10^{13} квантов (освещённость, близкая к создаваемой Солнцем).

Б

Что значит – увидеть? Мы видим – это значит, что в сетчатке нашего глаза поглощаются световые кванты, в глазном нерве возбуждаются электрические импульсы и мозг принимает эти сигналы. Если кванты не будут поглощаться сетчаткой (отразятся, например, обратно), то мы ничего не увидим.

Будем для простоты считать, что зрачок поглощает всё, что в него попадает (абсолютно чёрный зрачок).

В

Пока квант натыкается на идеально отражающие стенки, он передвигается внутри шара. Наткнувшись на зрачок, он поглощается, и больше внутри шара уже смотреть нечего. Когда это произойдёт? Сразу, как только мы заглянули? Или попозже? Это зависит от случая. Вероятность попадания кванта при данном столкновении в зрачок равна отношению поверхности S_1, занимаемой зрачком, ко всей поверхности шара S. Таким образом, мы можем считать, что *в среднем* (по множеству экспериментов с шаром) квант будет выбывать из игры после 14 000 отражений, т.е. после открывания задвижки он проходит внутри шара перед попаданием в зрачок путь порядка $14\,000 \cdot 30 \text{ см} = 4200 \text{ м}$, затрачивая на это 14 мкс. Здесь, как и раньше, мы пренебрегаем тем, что квант перемещается в общем случае по хорде, которая короче диаметра.

Увидим ли мы этот квант? Вряд ли. Дело в том, что, как показали эксперименты академика С.И. Вавилова, наблюдатель, даже привыкнувший к темноте, может уверенно заметить вспышку света только при условии, что число квантов, поступивших в зрачок за доли секунды, не менее 8-50 (для разных наблюдателей цифры различны), а обнаружение одиночного светового кванта маловероятно.

Теперь ясно, что наблюдатель, смотрящий внутрь шара диаметром 0,01 мм и имеющий дело с освещённостью в 250 раз больше солнечной, не только не будет ослеплён ею, но скорее всего ничего там не увидит.

Рассмотрим второй случай: внутри шара 10^{13} квантов. При таком большом числе можно полагать, что поверхность бомбардируется равномерно и, следовательно, в каждый отрезок времени на зрачок попадает в 14 000 раз меньше квантов, чем на стенки шара. Полагая, что от одного столкновения до другого проходит одна милли-

ардная секунды (время пролёта по диаметру), мы находим, что каждую миллиардную секунды из шара уходит $^1/_{14\,000}$ часть квантов, имеющихся там на текущий момент. Следовательно, спустя одну миллиардную секунды останется

$$n_1 = 10^{13}\left(1 - \frac{1}{14\,000}\right) \text{ квантов,}$$

спустя две миллиардных

$$n_2 = 10^{13}\left(1 - \frac{1}{14\,000}\right)^2,$$

спустя m миллиардных

$$n_m = 10^{13}\left(1 - \frac{1}{14\,000}\right)^m.$$

Если время t от начала наблюдения выражать в секундах, то

$$t = \frac{m}{10^9}.$$

Поэтому последнее выражение можно переписать в виде

$$n = 10^{13}\left(1 - \frac{1}{14\,000}\right)^{10^9 t}.$$

Расчёт по этой формуле показывает, что уже спустя примерно 10 мкс в шаре останется только половина квантов, спустя 20 мкс – четверть, 100 мкс – одна тысячная, 200 мкс – миллионная, а через 450 мкс там останется в лучшем случае одиндва кванта. Эти результаты изображены на рис. 150 в виде кривой ***а***.

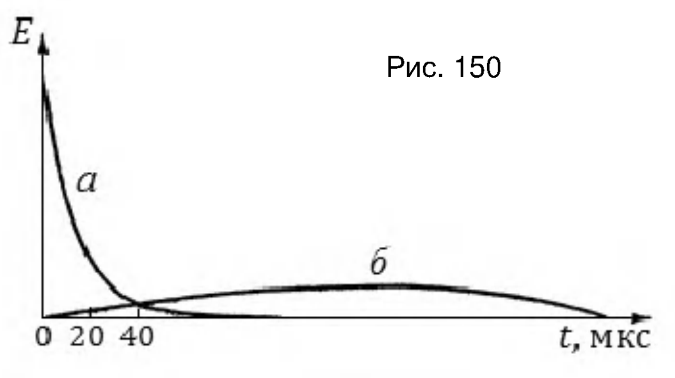


Рис. 150

Что же увидит наблюдатель? Число квантов сейчас достаточно для возбуждения глаза. Но инерционность зрения (порядка 0,05 с) слишком велика, чтобы в зрительном аппарате правильно была воспроизведена форма столь короткого светового импульса. Поэтому наблюдателю покажется, что он видит вспышку, растянутую до 0,05 с (т.е. примерно в 200 раз) и соответственно ослабленную (тоже примерно в 200 раз). На рис. 150 зрительное впечатление показано кривой ***б*** (без соблюдения масштаба).

Если бы, однако, такую же освещённость внутри имел абсолютно белый шар диаметром 30 м, то в нём было бы в миллион раз больше квантов. При том же диаметре зрачка они расходовались бы с той же скоростью, поэтому сам процесс угасания света растянулся бы в миллион раз, т.е. свет ослабевал бы вдвое примерно за 10 с, и наблюдать за угасанием можно было бы несколько минут, после чего это невообразимо огромное число квантов исчезло бы в бездонной пропасти зрачка.

Значит, всё-таки можно запасать свет в горшке! Да, если у вас есть горшок, абсолютно белый внутри. Но у вас (и в лучших посудных магазинах) нет такого сосуда. Поэтому свет запасают только косвенно: либо в виде энергии заряженного аккумулятора, с помощью которого можно в нужный момент зажечь лампочку; либо в виде топлива (образуемого при фотосинтезе в растениях); либо освещая фотолюминофор – вещество, в котором световые кванты могут перевести электроны в более энергичные состояния, возвращаясь из которых впоследствии электроны отдадут свет, и т.д.

Теперь уже вопрос о том, можно ли читать с помощью одного-единственного кванта (см. задачу «Пополам не делится»), ясен: нельзя! И хотя один квант внутри абсолютно белого шара диаметром 1 мм создаёт освещённость, достаточную для чтения, но это только до тех пор, пока никто не пользуется этой освещённостью. Для чтения нужен зрачок и текст. Стоит ввести эти не абсолютно белые вещи внутрь абсолютно белого шара, как вся система оказывается не абсолютно белой. Квант поглотится зрачком – тогда мы увидим квант (если повезёт!), но не увидим текста. Квант поглотится текстом – тогда мы не увидим ни кванта, ни текста.

Для того чтобы прочесть хотя бы одну букву, необходимо очень большое число квантов. Нужно, чтобы в каждом элементе буквы (палочке, закруглении, крючке) поглотилось, а от окружающего элемент фона отразилось (причём не куда попало, а именно в зрачок) число квантов, достаточное для распознавания элемента.

VI. Разное (от ботаники до бионики)

99. Холодная вода теплее горячей

А

Имеется один литр горячей воды с температурой t_1 и один литр холодной с температурой t_2. При помощи горячей воды нагревают холодную. Можно ли сделать так, чтобы окончательная температура литра нагреваемой воды стала выше окончательной температуры нагревающей воды?

Б

Обычно немедленно и категорически отвечают:

– Нельзя! Процесс теплопередачи прекратится, когда температура обоих литров воды станет одинаковой. Чтобы процесс шёл дальше, нужно, чтобы тепло передавалось от холодного тела к более горячему, а это противоречит второму началу термодинамики! Если бы это было возможно, то возможен был бы и «вечный двигатель».

Мы уважаем второе начало термодинамики и вовсе не предлагаем вам его нарушить. Клаузиус прав![1] Тем не менее рекомендуем вам попытаться изобрести способ решить задачу. Малую часть (1 см^3) холодной воды с помощью литра горячей мы могли бы нагреть почти до t_1. Вот сто́ящая идея! Надо попробовать разделить нагреваемую воду на части и нагревать их поочерёдно.

В

Пусть же вихрем сабля свищет!
Мне Костаки не судья!
Прав Костаки, прав и я!

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Новогреческая песнь»

Пусть в термосе A (рис. 151) находится горячая вода, в термосе $Б$ – холодная. Нальём в сосуд B с тонкими теплопроводными стенками часть холодной воды и опу-

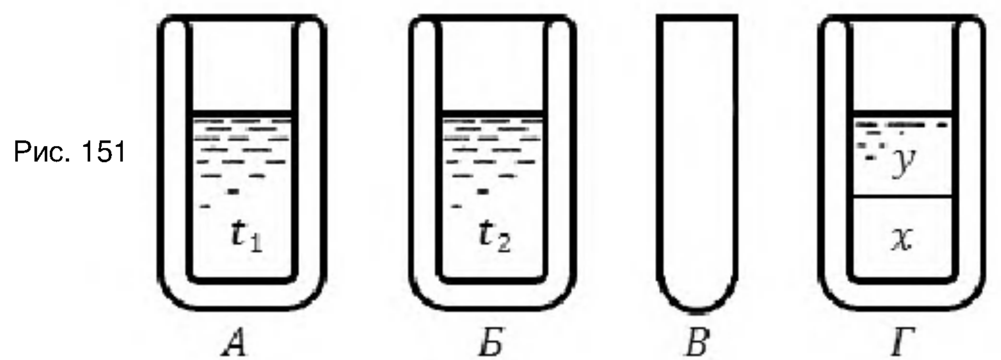


Рис. 151

стим сосуд B в горячую воду (термос A). Через некоторое время температура воды в A и B сравняется, причём установится некоторая промежуточная температура x, так что

$$t_1 > x > t_2 .$$

[1] По крайней мере пока речь идёт о литре, а не о десятке-другом молекул воды.

Выльем нагретую до x воду из $В$ в термос $Г$. Нальём в сосуд $В$ оставшуюся холодную воду (с температурой t_2) и опять погрузим $В$ в $А$. Температура в $А$ и $В$ снова сравняется и станет равной y, причём

$$x > y > t_2\,.$$

Перельём воду из $В$ в $Г$. Там в результате смешивания обеих частей нагреваемой воды, имеющих температуры x и y, получим некоторую среднюю температуру z:

$$x > z > y\,.$$

В воде же, которая была горячей, установится температура y, которая меньше z. Именно это и требовалось условиями задачи. Проследите ещё раз за всеми рассуждениями, чтобы убедиться, что мы не нарушали законов термодинамики, а наоборот, всё время ими руководствовались.

Пример: если $t_1 = 95°\mathrm{C}$ и $t_2 = 5°\mathrm{C}$, то, разделяя холодную воду на две равные части и применяя к ней изложенную выше процедуру, имеем

$$x = \frac{2t_1 + t_2}{3} = \frac{2 \cdot 95 + 5}{3} = 65°\mathrm{C}\,;$$

$$y = \frac{2x + t_2}{3} = \frac{2 \cdot 65 + 5}{3} = 45°\mathrm{C}\,.$$

Это и будет окончательная температура «горячей» воды. А для «холодной»:

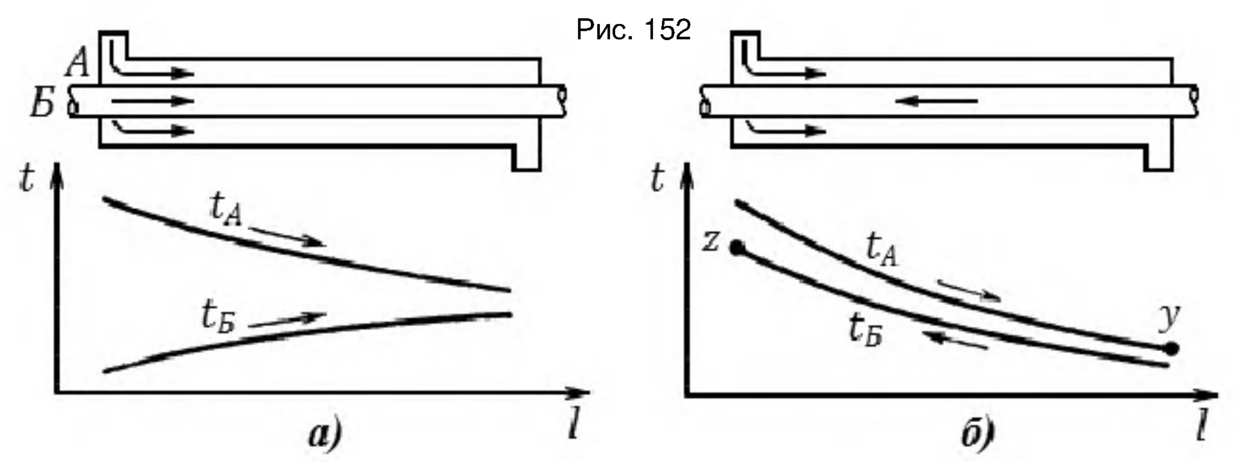
$$z = \frac{x + y}{2} = \frac{65 + 45}{2} = 55°\mathrm{C} > 45°\mathrm{C}\,.$$

Из-за неизбежных потерь тепла на нагрев посуды эта разница (а главным образом сами значения y и z) будет несколько меньше. Но знак неравенства сохранится.

То же самое произошло бы, если бы мы разделили пополам не холодную, а горячую воду.

Отметим, что, разделяя холодную воду не на две, а больше частей, можно получить окончательную её температуру ещё более высокой. Эта возможность в более совершенном воплощении используется в технике при теплопередаче от одного жидкого или газообразного тела к другому. Если нагреваемую и нагревающую жидкости пустить по внутренней $Б$ и внешней $А$ трубам попутно (рис. 152*а*), то на выходе температура обеих жидкостей будет приблизительно одинаковой. Если же пустить жидкости по трубам навстречу друг другу (рис. 152*б*), то при достаточно длинных трубах и правильно выбранных сечениях и скоростях жидкостей последние почти целиком обменяются температурой (не считая начальной и конечной порций воды, соответствующих переходным процессам включения и выключения установки).

Рис. 152



На графиках по оси абсцисс отложено расстояние вдоль трубы, по оси ординат – температура. Стрелками в трубах показано направление движения жидкости, стрелками на кривых – ход температуры. Из рис. 152*б* видно, что $z \gg y$, т.е. окончательная температура нагреваемой жидкости существенно выше окончательной температуры нагревающей.

В таком виде задача впервые была опубликована автором в журнале «Физика в школе» (1956, № 3). В дальнейшем, при перепечатке в сборниках парадоксов, некоторые из авторов сделали к ней небольшое дополнение, к сожалению, ошибочное. О нём сейчас пойдёт речь.

Вернёмся от труб со встречными потоками жидкостей к двум неподвижным литрам и рассмотрим вопрос: что будет, если холодную (или горячую) воду разделить не на две, а на десять, сто, тысячу или более частей? Интуитивно чувствуется, что температура холодной воды будет всё выше и выше. Что же будет при бесконечно мелких частях? Загипнотизированные случаем с трубами, все в один голос заявляют, что горячая и холодная вода полностью (или «почти полностью») обменяются температурой!

То, что это неверно, легко показать без всяких вычислений. Только первая бесконечно малая порция холодной воды приобретёт *первоначальную* температуру горячей. Последняя же порция приобретёт температуру, равную *окончательной* температуре горячей. Значит, различные части холодной воды нагреются до разных температур, при их смешении температура окажется некоторой средней. А чтобы холодный литр приобрёл первоначальную температуру горячего, нужно, чтобы эту температуру приобрели все его порции, что невозможно.

Теперь немного вычислений. Пусть $t_1 = 100°\text{C}$ и $t_2 = 0°\text{C}$ (с такими круглыми цифрами легче считать). Разделив холодную воду на десять равных частей, после первого теплообмена получаем температуру горячей воды

$$x_1 = \frac{10}{10+1} t_1\,,$$

после второго

$$x_2 = \frac{10}{11} x_1 = \left(\frac{10}{11}\right)^2 t_1\,,$$

а после десятого

$$y = x_{10} = \left(\frac{10}{11}\right)^{10} t_1 \approx \frac{100°\text{C}}{2{,}59} \approx 38{,}5°\text{C}\,.$$

Окончательную температуру «холодной» воды можно найти, смешивая все её десять частей:

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10}\,.$$

Но ещё проще её найти из того условия, что при равенстве масс и теплоёмкостей холодная нагреется на столько, на сколько остынет горячая, т.е.

$$z = t_2 + (t_1 - y) = 0 + 100 - 38{,}5 = 61{,}5°\text{C}\,.$$

Любопытно, что дальнейшее дробление холодной воды уже мало что даёт для её нагрева: разделив на сто частей, мы получили бы

$$y = x_{100} = \left(\frac{100}{100+1}\right)^{100} t_1 \approx 37{,}2°\text{C}\,; \quad z \approx 62{,}8°\text{C}\,.$$

Это только на 1,3°С выше, чем при делении на 10 частей. В общем случае, деля воду на n равных частей, мы получаем

$$y = x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n t_1 = \frac{t_1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{t_1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Студенты первого курса института уже знают (а школьники узнают, когда будут студентами), что знаменатель последнего выражения при неограниченном возрастании n не растёт неограниченно, а стремится к вполне определённому числу. Это число для математики и физики не менее важно, чем знаменитое число π, и, подобно π, этому числу дано своё обозначение. Его называют основанием натуральных логарифмов и обозначают буквой e:

$$e = 2{,}71828\ldots$$

Итак, окончательная температура «горячего» литра не может спуститься ниже

$$y = \frac{t_1}{e} = \frac{100}{2{,}71828\ldots} = 36{,}787\ldots\,°\text{C}$$[1],

а «холодного» – подняться выше $z = 100 - 36{,}787 = 63{,}213°\text{C}$, т.е. литры не обменялись температурами ни полностью, ни «почти полностью». Отметим, что эти цифры получены в предположении, что теплоёмкость воды не зависит от температуры, что не совсем верно.

В общем случае, когда температура «холодной» воды не 0°С, а t_2, формула для окончательной температуры «горячей» воды имеет вид

$$y = \frac{t_1 - t_2}{e} + t_2\,.$$

Мы рассмотрели случай, когда на части делится или холодная или горячая вода. Читатель В.Д. Шнайдер (Дубна) показал, что если на части делится и холодная и горячая вода, то теплообмен происходит глубже. Однако для этого нужно не только разделить оба литра на порции, но ещё и делать теплообмен встречно: выстроить из горячих порций один «поезд», а из холодных – другой, и пустить эти «поезда» навстречу друг другу по теплообменнику. Нетрудно видеть, что, мельча порции до бесконечно малых и двигая их навстречу друг другу, мы получаем теплообменник рис. 152*б*, работа которого уже описана и который действительно лучше в силу встречности потоков.

---

[1] То, что это число неплохо совпадает с такой важной константой, как нормальная температура человеческого тела, читателей, склонных к мистике может настроить на размышления о гармонии, ниспосланной свыше. Чтобы подлить масла в лампаду, отметим, что совпадение имеет место на всех шкалах температуры, в том числе Реомюра, Фаренгейта и Кельвина. Однако магическую силу этого числа в корне подрывает то обстоятельство, что у кур, например, нормальная температура 42°С. Правда, можно возразить, что венцом мироздания являются всё-таки не куры, а человек. Но такое возражение в данном случае не имеет силы, так как оно сделано человеком. Вполне возможно, что куры об этом иного мнения.

Впрочем, может быть, в формулу нужно подставлять температуру плавления и кипения не воды, а растворов солей, входящих в состав человеческой и соответственно куриной крови, – и мы получим физико-физиологический закон, которому подчиняются все теплокровные животные?

100. Не пейте сырой воды

А

Как известно, чтобы нагреть 1 кг воды на 1°С, требуется 1 ккал тепла (это точно при 20°С, но приблизительно верно и при других значениях температуры).

Можно ли прокипятить 100 литров воды, имеющей температуру 20°С, затратив только 3000 ккал и не прибегая к другим источникам энергии?

Б

Князь Батог-Батыев: «Ура, придумал!»
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Фантазия» (водевиль)

– Знаем мы эти штучки! Поднимем воду на надлежащую высоту – и она закипит. Температура кипения зависит от давления. С помощью 3000 ккал 100 л можно нагреть на 30°С, т.е. до 50°С. Если это сделать там, где атмосферное давление составляет лишь 100 мм рт. ст. (т.е. на высоте порядка 14 км), то вода закипит при 50°С. А можно и не подниматься на такую высоту, а просто поставить воду под колпак, из-под которого откачать воздух. Если постараться, то можно добиться такого давления, при котором вода закипит даже без всяких добавочных калорий при 20°С.

Эти способы не соответствуют условиям задачи: чтобы поднять воду на высоту или откачать из-под колпака воздух (и образующиеся при кипении водяные пары), понадобится дополнительная энергия.

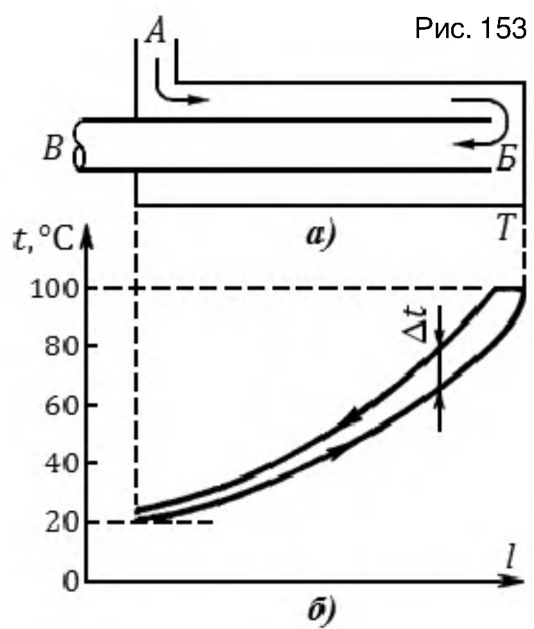
Требуется прокипятить воду в обычных условиях, на обычной высоте. Прочитайте ещё раз задачу «Холодная вода теплее горячей». Она подскажет способ решения или по крайней мере даст вам полезную уверенность, что чудеса на свете всё-таки бывают.

В

Разорваки: «Счастливая мысль!»
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Фантазия» (водевиль)

Довести одновременно до температуры 100°С все 100 л воды с помощью отведённого нам тепла невозможно. Но в задаче нет требования, чтобы вся вода кипела одновременно. Будем доводить её до кипения по частям, а недостающее для подогрева холодной воды тепло будем извлекать из уже прокипевшей. Остывая, она не перестанет быть кипячёной (не потеряет своего главного достоинства, ради которого её обычно кипятят, – отсутствия живых микробов). Задача легко решается путём небольшой переделки устройства, изображённого на рис. 152 (см. задачу «Холодная вода теплее горячей»).

Холодная вода поступает в отверстие *А* (рис. 153*а*) наружной трубы, движется по трубе вправо, постепенно нагреваясь, кипит в точке *Б* (источник тепла *Т* показан условно) и по внутренней трубе идёт к *В*, отдавая тепло движущейся навстречу холодной воде (для лучшей отдачи внутреннюю трубу можно выполнить в форме змеевика). Таким образом, на вход *А* подаётся холодная сырая вода, а с выхода *В* снимается холодная кипячёная.



На рис. 153б показано распределение температуры t вдоль трубы (нижняя ветвь графика – для внешней трубы, верхняя – для внутренней). Крутизна графика в каждой точке (скорость изменения температуры) пропорциональна разности температур Δt в этой точке. С помощью графика можно определить, какая часть воды имеет ту или иную температуру. Так, если, например, в каждой из труб по 10 л воды, то не более 2 л имеют температуру от 90 до 100°C (определяется отрезком оси l, находящимся под той частью графика, где $90°C < t < 100°C$), и т.д. Видно, что средняя температура воды, находящейся в трубах, порядка 50°C, а средняя для всех 100 л – намного меньше, потому что ещё не вошедшая и уже вышедшая вода (80 л) имеет температуру, очень близкую к 20°C. Следовательно, отпущенной нам энергии хватит для реализации замысла.

Правда, этот график является только иллюстрацией, но не доказательством. Он не учитывает того, что при кипении много тепла можно потерять на парообразование. Воду надо только доводить до кипения и тут же отправлять её во внутреннюю трубу. Не учитывается, что часть тепла будет потеряна на нагрев трубы. Кроме того, последние литры воды, прокипев, будут возвращаться неостывшими (холодная вода кончилась), что тоже снижает эффективность нашего кипятильника. Впрочем, последние два недостатка несущественны, если кипятильник работает очень долго, т.е. кипятит не 100 л с помощью 3000 ккал, а, например, 100 000 л с помощью 3 000 000 ккал.

101. Ватерлиния

А

Океанский пароход отправляется из Ленинграда через Гибралтар в Одессу. Ввиду ожидающихся в Бискайском заливе штормов строго запрещено перегружать пароход. Между тем капитан разрешил продолжать погрузку, хотя ватерлиния (линия на корпусе судна, отмечающая допустимую глубину погружения) уже скрылась под водой. Что это: лихачество или точный расчёт?

Б

Если вы думаете, что капитан учёл ту массу топлива и продовольствия, которая будет израсходована в пути до Бискайского залива, то имейте в виду, что это мелочь. Если вы хотите привлечь к объяснению центробежную силу инерции (вследствие вращения Земли), которая в Бискайском заливе больше, чем в Ленинграде, то учтите, что она одинаково действует и на пароход, и на воду и не влияет на положение ватерлинии.

В

В Ленинградском порту вода пресная (в этом виновата полноводная Нева и мелководная Балтика). Плотность её можно принять за единицу. В Бискайском заливе вода солёная, плотность – около 1,03. В соответствии с законом Архимеда в Бискайском заливе по сравнению с Ленинградом корабль тех же размеров может быть на 3% тяжелее при той же осадке. А если полезный груз составляет только половину всей массы корабля, то 3% от массы всего корабля составляют 6% полезного груза. После того как корабль в Ленинграде нагружен до ватерлинии, можно прибавить ещё 6% груза (считая уже размещённый груз за 100%).

Часто для облегчения расчётов при погрузке на корпусе корабля наносятся две ватерлинии, одна из которых соответствует пресной речной воде, вторая – солёной морской.

102. Волна и камень

А

Сидя на набережной у деревянных мостков, понаблюдайте за концом мостков, когда на него набегает волна. Доска поднимается, но затем, когда волна сбегает, возвращается на старое место. Почему?

Б

– Закон Архимеда! Доска просто всплывает!

Но ведь доска прибита гвоздями к столбу, заколоченному в дно водоёма. Ещё более решительное возражение: почему гранитные ступени набережной Невы у подножия сфинксов тоже поднимаются и опускаются в такт с волной?

В

Как известно, загадки сфинкса невозможно отгадать. Наша загадка менее замысловата: нужно принимать во внимание не закон Архимеда, а закон преломления света.

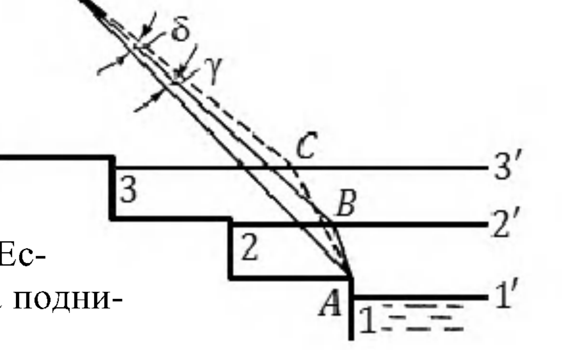


Рис. 154

Если ступенька A (рис. 154) свободна от воды (уровень воды $11'$), то наблюдатель O видит её по прямой OA. Если вода поднимается до уровня $22'$, то луч света от точки A сможет попасть в глаз только по ломаной ABO, т.е. направление OB, в котором глаз видит точку A, поднимается вверх на угол γ, отчего ступенька кажется приподнятой. Если вода поднимется ещё выше ($33'$), то и ступенька поднимется больше ($\delta > \gamma$).

В качестве курьёза можно отметить, что если бы вы были более упрямы, то могли бы настаивать на том, что и гранитная ступенька поднимается под действием закона Архимеда, – и вы были бы отчасти правы. И это несмотря на то, что гранит намного тяжелее воды. Представим, что ступенька укреплена на упругом основании (толстый слой резины) и нависает над водой. Ступенька согнула резину и опусти-

лась. Когда набежит волна, ступенька потеряет часть веса, отчего прогиб резины уменьшится и каменная ступенька поднимется! Любое основание обладает определённой упругостью, правда, меньшей, чем резина. Поэтому любитель поспорить может утверждать, что и каменная ступенька, укреплённая в грунте, немножко поднимается.

103. Зубчатая передача

А

На рис. 155 вы видите зубчатую передачу. Самая большая шестерня является ведущей. Она вращает вторую, меньшую; та в свою очередь – третью, ещё меньшую, и т.д. Наконец, последняя шестерня находится в зацеплении с первой. Будет ли эта зубчатая передача работать?

Б

Рис. 155

– Нет, не будет! – дружно отвечают все, и автор с этим согласен. Но невозможно согласиться с объяснением причин неработоспособности соединения, которые приводит большинство читателей. Вот это объяснение.

Пусть самую большую шестерню мы вращаем медленно. Число зубьев второй шестерни меньше, чем первой. Следовательно, число оборотов её больше. Число оборотов третьей шестерни ещё больше, и т.д. В результате последняя шестерня вращается сама и должна вращать первую с огромной скоростью. Но ведь мы условились, что первая вращается медленно. Не может же она вращаться одновременно и медленно, и быстро!

То, что это неправильный ответ, выясняется из простого расчёта. Передаточное число каждой пары шестерён равно отношению их чисел зубьев z, или отношению их радиусов. Для пар шестерён 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-1 передаточные числа равны соответственно

$$\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{z_3}, \frac{z_3}{z_4}, \frac{z_4}{z_5}, \frac{z_5}{z_1},$$

а их произведение

$$\frac{z_1 z_2 z_3 z_4 z_5}{z_2 z_3 z_4 z_5 z_1} = 1,$$

так как все сомножители числителя сокращаются с соответствующими сомножителями знаменателя. Значит, число оборотов, которое пятая шестерня задает первой, равно собственному числу оборотов первой шестерни. Следовательно, первую шестерню никто не заставляет вращаться одновременно с двумя скоростями разной величины.

Ещё проще это доказывается тем, что поворот первой шестерни на один зуб должен вызвать поворот остальных (в том числе и пятой, а следовательно, и снова первой) тоже именно на один зуб, так как они находятся в зацеплении.

Модули линейных скоростей всех шестерён одинаковы! Различаются лишь угловые скорости.

И всё-таки эта передача работать не может! Но дело тут в другом.

B

Передача не может работать потому, что последняя шестерня будет пытаться повернуть первую в направлении, противоположном тому, которое мы ей задаём.

Зададим, например, первой шестерне вращение по часовой стрелке. Тогда вторая будет вращаться против часовой стрелки, третья – по стрелке, четвёртая – против, пятая – по часовой стрелке и будет пытаться повернуть первую против часовой стрелки, причём в точности с тем же усилием, с которым мы поворачиваем её по стрелке. В результате нашим усилиям, как бы они ни были велики, всегда противостоит равное по величине и противоположное по направлению усилие пятой шестерни (или, если угодно, второй: ведь эту же передачу можно рассматривать и в обратном порядке).

Передачи, подобные рассмотренной, могут работать только при чётном количестве шестерён.

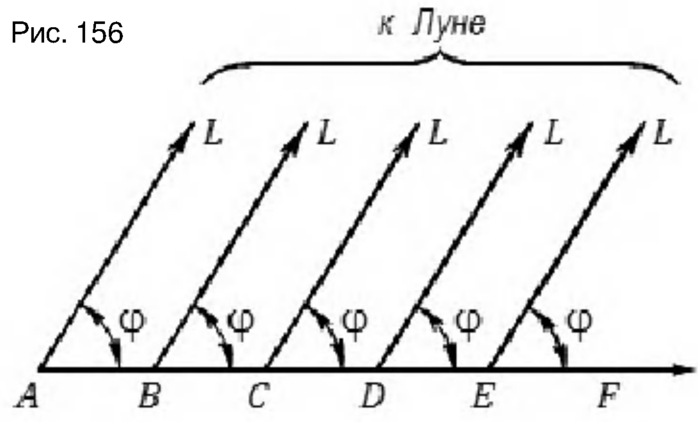
Все свойства зубчатых (и других) передач описываются более полно, если передаточным числам приписывается не только величина, но и знак, причём минус соответствует изменению направления вращения. Пара шестерён в зацеплении имеет отрицательное передаточное число. Рассматриваемая передача содержит пять зацеплений, а произведение пяти отрицательных чисел есть отрицательное число (в данном случае это -1).

104. Полёт ночной бабочки

A

Ночные бабочки для своей навигации используют Луну. Приняв намерение лететь из точки A в точку F по прямой, бабочка «измеряет» угол φ между направлением на Луну AL (рис. 156) и направлением на цель своего полёта AF. В дальнейшем, чтобы лететь по прямой, бабочка просто поддерживает этот угол постоянным, т.е. летит так, чтобы Луна держалась в её поле зрения строго фиксированным образом[1].

Рис. 156



А какова будет траектория полёта бабочки, если она вместо Луны ошибочно использует уличный фонарь?

[1] Как известно, глаз насекомого состоит из множества ячеек (омматидиев), напоминающих трубочки, каждая из которых способна принимать свет только с одного направления. Бабочка должна держать Луну в поле зрения одних и тех же трубочек, и тогда ориентация её головы будет выдерживаться постоянной.

Б

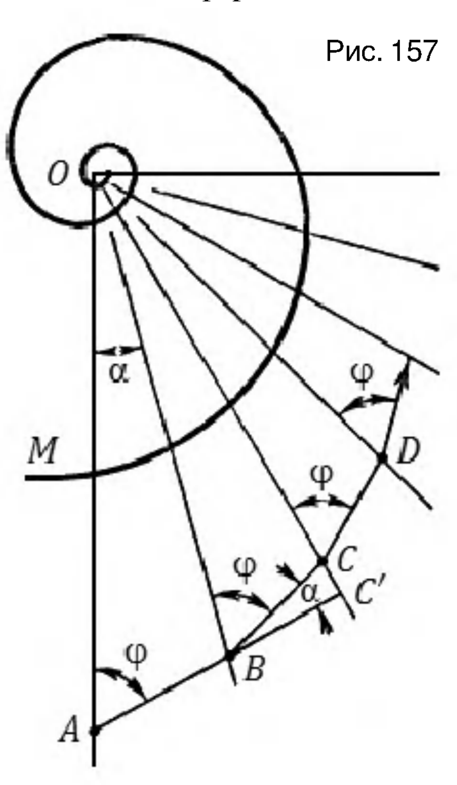
Луну в данной задаче можно рассматривать как бесконечно далёкий источник света. Направления на Луну из всех точек трассы бабочки (AL, BL, CL, ...) параллельны друг другу. Благодаря этому поддержание постоянства угла φ и обеспечивает прямолинейность полёта. Фонарь же находится на конечном расстоянии. Поэтому направление на фонарь (а при постоянстве угла φ и направление полёта) непрерывно меняется. Постройте траекторию полёта бабочки вокруг фонаря.

В

Глядя на мир, нельзя не удивляться!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 110

Направления на фонарь O (рис. 157) из точек A, B, C, ... не параллельны. Бабочка, в точке A взявшая курс под углом φ к направлению на фонарь, летит к точке B. Поскольку в точке B направление на фонарь изменилось на угол α ($\angle AOB$), то, выдерживая $\varphi = \text{const}$, бабочка вынуждена изменить своё первоначальное направление полёта также на угол α (CBC'). То же она вынуждена повторить в точках C, D, ...

Рис. 157



Если бы бабочка корректировала свою траекторию только в точках B, C, ..., то её путь изобразился бы ломаной ABC... На самом деле направление на фонарь меняется непрерывно, что вынуждает бабочку также непрерывно корректировать направление полёта. В результате её путь изображается плавной кривой (например, M). Кривая, пересекающая под постоянным углом все радиусы, исходящие из данной точки, называется логарифмической спиралью. Она уже встречалась нам в задаче «Путешествие на северо-восток». Там она представляла собой последний, околополярный участок пути туриста, отправившегося на северо-восток.

Двигаясь по логарифмической спирали, бабочка будет или непрерывно сближаться с фонарём, если $\varphi < 90°$, или непрерывно удаляться от него (по «разматывающейся» спирали), если $\varphi > 90°$. Если она выберет $\varphi = 90°$, то её путь вокруг фонаря будет окружностью. Чем ближе угол φ к 90°, тем теснее друг к другу витки спирали, описываемой бабочкой. Точно так же летел бы самолёт, ориентирующийся по некоторой наземной радиостанции (с помощью радиокомпаса) и соблюдающий условие $\varphi = \text{const}$.

Вы, разумеется, не раз видели это явление в действии. Замечали и отступления от нарисованной картины. Бабочка рано или поздно замечает, что «Луна» ведёт себя странным образом: увеличивается в размерах, начинает ярче светить и даже греть. Заподозрив, что с Луной что-то неладно, бабочка принимает решение изменить навигационный угол φ, отчего она переходит на другую спираль, более крутую или

более пологую. Приняв $\varphi > 90°$, она удалится от фонаря, но при первой же попытке лететь под углом меньше 90° она снова приблизится к нему.

Это явление можно положить в основу световой ловушки для некоторых видов вредных насекомых.

Есть и другая причина, отклоняющая бабочку от идеальной логарифмической спирали. Это сила инерции. При пользовании настоящей Луной бабочка летит по прямой, чему инерция не препятствует. При полёте по логарифмической спирали на бабочку действует сила инерции, сбивающая её со спирали, особенно на внутренних, очень искривлённых витках.

Мы рассмотрели плоскую картину. На самом деле фонарь и бабочка находятся в трёхмерном пространстве. Рассмотрите трёхмерный случай сами.

Советуем вам проделать забавный и поучительный эксперимент. Для этого необходимо иметь два источника света с выключателями. Когда в комнату залетит ночная бабочка и начнёт кружить вокруг одной из ламп, выключите эту лампу (вторая должна остаться включенной, иначе вы в темноте не увидите дальнейшего поведения бабочки). В момент выключения бабочка переходит со спирали на прямой полёт по касательной к этой спирали и, как правило, на полном ходу врезается в стену. Ошарашенная случившимся (Луна погасла! И синяк на лбу!), она некоторое время осмысливает эти странные события с философских позиций. Впрочем, философствует она недолго. Обнаружив свет второй лампы, она решает, что никакой катастрофы во Вселенной не было, и начинает кружить вокруг второй лампы. Более того, если бабочка при выключении первой лампы избежит удара головой о стену, то она вообще не находит повода для сомнений и сразу же переходит к другой лампе.

Кроме предмета забавы, в поведении бабочки есть предмет и для восхищения: навигационная система бабочки весит доли миллиграмма, для её функционирования достаточно мельчайшей росинки нектара, причём в работе она очень надёжна. Навигационные системы, создаваемые человеком для решения аналогичных задач, весят пока десятки килограммов, потребляют киловатты энергии и на удар о стену реагируют весьма болезненно. Впрочем, может быть, принцип навигации бабочки совсем иной? Будем надеяться, что бионика узнает это в своё время. И тогда мы сумеем перенести принципы, выработанные за многие миллионы лет естественного отбора кибернетическим устройством, управляющим полётом бабочки, в наши навигационные системы.

105. Изображение в оконном стекле

А

Вы находитесь в комнате и наблюдаете отражение лампового абажура (или другого крупного предмета) в оконном стекле. Почему, когда открывают дверь, изображение абажура на мгновение уменьшается, когда закрывают – увеличивается (в некоторых комнатах – наоборот)?

Б

Проделайте этот эксперимент в комнатах с дверью, открывающейся наружу и внутрь комнаты. Посмотрите, в какой из комнат изображение при открывании двери

увеличивается, а в какой, наоборот, уменьшается. Если вас постигнет неудача и вы не увидите этого загадочного явления, то не отчаивайтесь: немного воображения, размышлений – и вы сумеете не только объяснить это явление, но даже уверенно предсказать, как должна выглядеть комната, в которой эксперимент получится наиболее выразительно. Ну, а если теоретизирование всё же не помогает, то нажмите на стекло пальцем.

В

Щёлкни кобылу в нос – она махнёт хвостом.[1]
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 58

Если дверь открывается в коридор, то, открывая её, мы создаём разрежение воздуха в комнате. Давление воздуха на оконное стекло извне оказывается больше, чем изнутри. Стекло прогибается внутрь комнаты и превращается для нас из плоского зеркала в выпуклое, отчего размеры изображения уменьшаются. Через мгновение давление выравнивается, и изображение принимает первоначальные размеры. При закрывании дверь захватывает в комнату часть воздуха из коридора, давление в комнате возрастает, зеркало оконного стекла становится вогнутым, отчего изображение увеличивается. Однако и это состояние длится лишь мгновение: через оконные и дверные щели избыточный воздух быстро уходит из комнаты, и давление выравнивается.

В тех комнатах, где дверь открывается не наружу, а внутрь комнаты, всё происходит наоборот: в момент открывания двери изображение увеличивается, в момент закрывания – уменьшается.

Описанное явление тем сильнее выражено, чем меньше толщина и больше площадь каждого стекла и чем герметичнее и меньше комната. Опыт лучше удаётся зимой, когда все щели законопачены.

В двойном окне видны два изображения, разнесённые по глубине на двойное расстояние между стёклами. Дальнее изображение (в дальнем стекле) деформируется существенно меньше ближнего. Это и не удивительно: при одинаковом прогибе обоих стёкол объём воздуха между стёклами не изменился бы, а значит, не изменилось бы и давление на внешнее стекло. Но тогда прогиб внешнего стекла был бы равен нулю. Налицо противоречие, которое разрешается при меньшем прогибе внешнего стекла.

106. Плохая и хорошая геометрия

А

Источник сильного гамма-излучения (не обязательно ядерный взрыв) находится в точке A (рис. 158). В распоряжении наблюдателя B для защиты от излучения имеется толстый цилиндр бетона, у C – тонкий цилиндр той же длины (но с сечением, достаточным для того, чтобы за ним полностью спрятаться).

[1] Обращаем внимание специалистов кибернетики на то, что это высказывание Пруткова является первой в мировой литературе и предельно чёткой формулировкой проблемы «чёрного ящика», а также первым в этой области опубликованным результатом эксперимента.

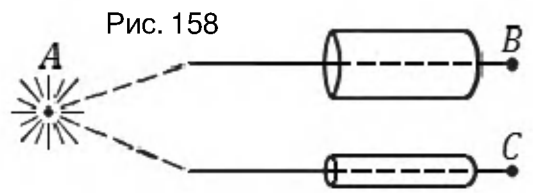


Рис. 158

Расстояния наблюдателей, как и цилиндров, от источника *A* одинаковы и велики, óси обоих цилиндров ориентированы точно на источник. Какой из наблюдателей надёжнее защищён?

Б

Укрываться от дождя под дырявым зонтиком столь же безрассудно и глупо, как чистить зубы наждаком или сандараком.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 42*а*

Инстинктивно хочется спрятаться за цилиндр потолще, но потом начинает брать верх здравый смысл, который подсказывает, что поскольку сечение тонкого цилиндра тоже достаточно велико, чтобы в него вписался человек, то, следовательно, безразлично, куда прятаться.

А теперь вспомним, что у кванта гамма-излучения, вошедшего в толщу бетона, судьба троякая: либо он будет поглощён (1 на рис. 159), либо пройдёт сквозь преграду беспрепятственно (2), либо, столкнувшись с электроном вещества, отклонится на некоторый угол (3). Всё зависит от случая. При большом количестве квантов наверняка произойдёт и то, и другое, и третье в пропорции, зависящей от энергии кванта. Эта пропорция может нас не интересовать, если задача решается только качественно. Из показанных на рис. 159 квантов опасным для наблюдателя *C* оказался только квант 2.

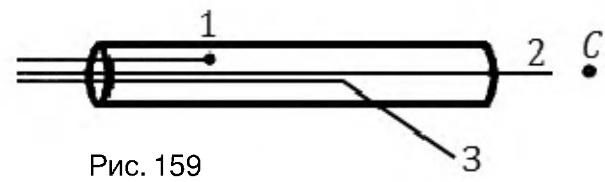


Рис. 159

Будем считать окружающий цилиндр воздух полностью прозрачным для квантов. Это вполне допустимо, если учесть, что поглощение в воздухе намного слабее, чем в бетоне.

Советуем, чтобы придать задаче наглядность, заменить мысленно бетон матовым стеклом, а невидимые и поэтому несколько таинственные гамма-кванты – более привычными нам световыми квантами (можно было бы сильно раскритиковать такую замену, но для качественного решения задачи она приемлема). Какой из наблюдателей будет сильнее освещён?

В

Матовый цилиндр будет освещать наблюдателя торцовой стенкой. У толстого цилиндра эта стенка больше, а её яркость будет приблизительно той же. Поэтому наблюдатель *B* будет освещён сильнее. Правда, здесь нужно было бы учесть роль полного внутреннего отражения от боковых стенок цилиндра и некоторые другие явления, протекающие неодинаково для световых и гамма-лучей.

Рассмотрим поведение отдельных гамма-квантов. На рис. 160 показан большой цилиндр и пунктиром – вписанный в него маленький, причём судьба квантов 1, 2 и 3 показана такой же, как и на рис. 159. Если бы цилиндр был тонким, то все остальные (из показанных на рис. 160) кванты двигались бы в воздухе параллельно цилиндру и, следовательно, не представляли бы для наблюдателя *B* никакой опасности. Опасным был бы только квант 2.

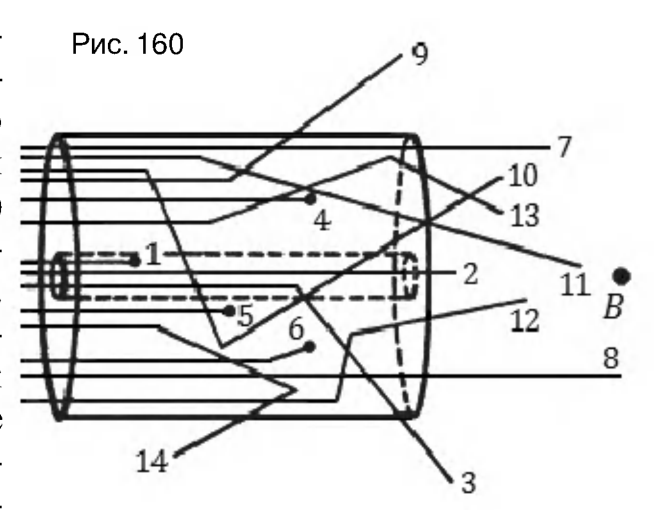
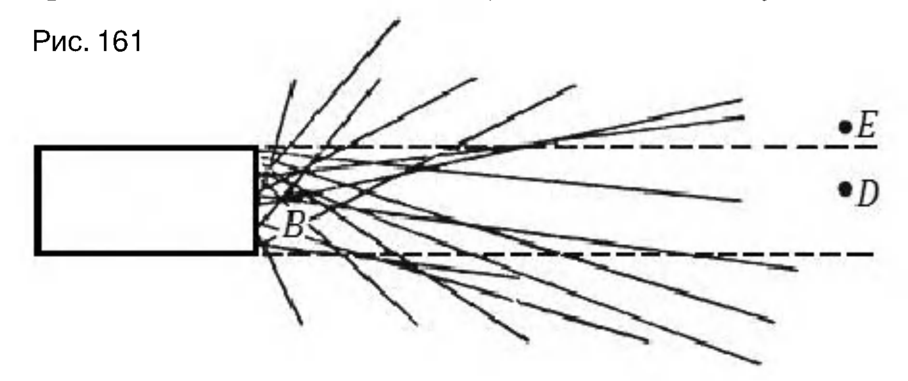


Рис. 160

Но толстый цилиндр захватывает и другие кванты. Проследим за судьбами тех квантов, которые проходят внутри большого (но вне малого) цилиндра. Среди них найдутся такие, которые будут поглощены сразу (4, 5) или после отклонения (6) и поэтому не повлияют на степень облучения наблюдателя *B*. Найдутся такие, которые пройдут без поглощения и рассеяния (7, 8) и тоже не попадут к наблюдателю. Самое интересное – поведение рассеянных квантов. Некоторые из них, претерпев одно (9), два (10, 14) или более отклонений, уйдут из цилиндра в безопасном для наблюдателя направлении. Но найдутся и такие, которые после одного (11), двух (12, 13) или более отклонений пойдут точно на наблюдателя, *увеличив* дозу его облучения. Ещё раз подчёркиваем: если бы цилиндр был тонким, то кванты 11, 12, 13, двигаясь в воздухе прямолинейно, прошли бы мимо наблюдателя.

В ядерной физике это явление, а точнее, геометрические условия, возникающие в толстом цилиндре, получили название «плохой геометрии». Условия в тонком цилиндре, если он настолько тонок, что радиус цилиндра меньше средней длины пробега кванта от столкновения до столкновения, называют «хорошей геометрией». Поскольку обычно средняя длина пробега гамма-квантов измеряется сантиметрами, то за цилиндром с «хорошей» геометрией можно спрятать только мышь. Наш «тонкий» цилиндр обладает, так сказать, «посредственной» геометрией (внутри него вполне вероятны многократные отклонения квантов), что, конечно, лучше, чем «плохая».

Рис. 161



Интересно, что прятаться за цилиндром лучше не у самого торца (рис. 161, точка *B*), а на некотором отдалении (точка *D*). При этом вы получите меньшую дозу тех квантов, которые рассеяны цилиндром, так как на большом расстоянии большинство их траекторий будут уже расходящимися и поэтому интенсивность облучения ими будет меняться обратно пропорционально квадрату расстояния от облучающего вас торца цилиндра (на не очень больших расстояниях эта зависимость не такая резкая, поскольку торец ещё нельзя рассматривать как точечный источник).

Для наглядности можно опять привлечь матовое стекло: освещённость наблюдателя будет убывать по тому же закону, что и телесный угол, под которым наблюдатель видит торец. Слегка уменьшится и полученная вами доза квантов, прошедших сквозь цилиндр без рассеяния (она тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния, но не от цилиндра, а от первичного источника гамма-квантов).

Однако не ошибитесь: на большом расстоянии от цилиндра вы можете не заметить, что сдвинулись из его тени (в точку E, например) и попали под прямые гамма-лучи, проходящие мимо цилиндра.

107. Заморозки на почве

А

В октябре случается, что выпадет снег и день-два устойчиво держится мороз в 1-2°C. Тем не менее, когда снова наступает потепление, многие растения оказываются живыми, зеленеющими и даже цветущими. Как им удаётся устоять? Ведь они не менее чем на 80% состоят из воды, а вода замерзает при 0°C. За двое суток они могли промёрзнуть насквозь, и кристаллики льда, имеющие больший объём, чем вода, должны были бы разорвать ткани растения изнутри.

Б

Специалист подобен флюсу: полнота его одностороння.
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 101

– Ну, это уже ботаника, а мы специалисты по точным наукам – математике и физике. Может быть, это «теплокровные» растения. Откуда нам знать тонкости биологии?

Мы не требуем от вас этих тонкостей. Достаточно, если вы перечислите *физические* причины морозостойкости растения. Попробуйте заморозить, хотя бы мысленно, выжатую из растения «воду».

В

Первая и самая естественная физическая причина: растение заполнено не водой, а тем или иным физиологическим раствором. Любой из водных растворов замерзает при температуре ниже той, при которой замерзает чистая вода. Так, например, 3%-й раствор щавелевой кислоты замерзает при −0,8°C, 13%-й раствор сахара – при −0,9°C и т.д., а смеси разных растворов – при ещё более низких температурах.

Можно назвать ещё несколько чисто физических причин. Пока растение не замёрзло, в нём продолжается подъём растворов по капиллярам (хотя и очень медленно из-за слабого испарения вблизи точки замерзания). При этом температура соков, исходящих от подземной части растения, намного выше нуля. Кроме того, многие растения покрыты волосками, в которых задерживается движение воздуха. В результате создается неподвижный слой воздуха, являющегося хорошим изолятором (шуба, хотя и очень тонкая).

Иногда высказывается мнение, что некоторые растения (подснежники) предохраняет от замерзания высокое давление сока в клетках[1]. Этот вопрос недостаточно изучен. Известно, что с повышением давления температура замерзания воды понижается. Но чтобы понизить её хотя бы на 1°C, необходимо увеличение давления более чем на 100 атмосфер. Следовательно, этот фактор не может быть решающим.

[1] *Вильчек Лех.* Красочные встречи. – Варшава, 1965.

Всё написанное относилось к однолетним растениям, которым при наступлении более серьёзных морозов суждено всё-таки погибнуть.

Многолетние растения (деревья, кустарники) переносят сильные морозы и вновь зеленеют весной. Для этого чисто физических средств уже недостаточно. Оказывается, эти растения осенью проводят целый комплекс физико-физиологических мероприятий по подготовке к зиме. Прежде всего, они сбрасывают то, что менее морозоустойчиво – листья, предварительно переведя из них основные ценности в ствол. Далее, многие растения осенью интенсивно накапливают сахар, понижая этим точку замерзания раствора. Но самым главным, пожалуй, является то, что клетки растения обезвоживаются: вода уходит из клеток в межклеточные пусто́ты, и лёд внутри клетки почти не образуется.

Любопытно, что при быстром замораживании некоторые растения (смородина и др.) выдержали температуры, близкие к абсолютному нулю, потому что при этом образуется иная разновидность льда, отличающаяся от обычной тем, что она тяжелее воды, т.е. замерзание приводит не к расширению, а к сжатию, при этом кристаллики льда клеток не разрушают.

108. Олимпийские правила

А

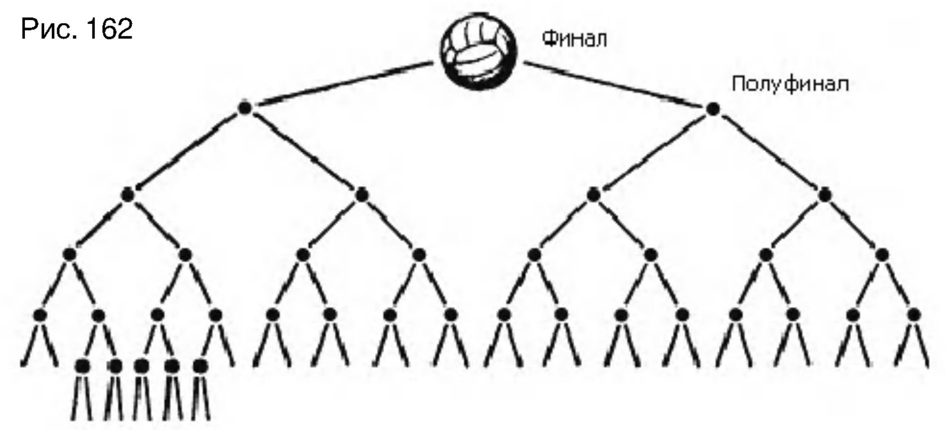
Кубок по футболу разыгрывается по олимпийской системе: ничьих не бывает, к следующему туру допускается только победившая команда, проигравшая же выбывает из розыгрыша. Для завоевания кубка команда должна победить во всех турах.

На участие в розыгрыше кубка поданы заявки от 16 389 команд. Сколько матчей будет сыграно, пока определится обладатель кубка? (Не путать число матчей с числом туров!)

Б

– Сейчас подсчитаем! – охотно говорят любители футбола и затем, как правило, начинают строить график розыгрыша (рис. 162), отмечая точками матчи, подводя к ним снизу по две линии, изображающие команды-участницы, и отводя от них вверх по одной, изображающей команду-победительницу.

Рис. 162



– Итак, должна победить одна команда. Следовательно, в финальном матче играют две команды (один матч), в полуфинальных – четыре (два матча), четвертьфинальных – восемь (четыре матча) и т.д.

Быстро убедившись, что график довести до конца не удастся, переходят к заменяющей его таблице. Удваиваются и удваиваются цифры, заполняются колонки, и, наконец, обнаруживается, что если бы число заявок было на пять меньше (16 384), то таблица была бы очень изящной (в двоичной системе счисления число $16\,384 = 2^{14}$ оказывается круглым: 100 000 000 000 000). Но деваться от пяти «лишних» команд некуда: никто не хочет считать себя лишним. Придется бросить жребий: какие-то десять команд должны пройти ещё одну ступень борьбы (см. самый нижний этаж рис. 162), сыграть матчи между собой и этим уменьшить число оставшихся команд на пять и добавить самую нижнюю строку в таблицу.

№ ступени	Название ступени	Число команд	Число матчей
0	Кубок	1	0
1	Финал	2	1
2	Полуфинал	4	2
3	Четвертьфинал	8	4
4	$^1/_8$ финала	16	8
5	$^1/_{16}$ финала	32	16
6	$^1/_{32}$ финала	64	32
7	$^1/_{64}$ финала	128	64
8	$^1/_{128}$ финала и т.д.	256	128
9		512	256
10		1024	512
11		2048	1024
12		4096	2048
13		8192	4096
14		16384	8192
15		10	5

– Ну, вот, самое трудное позади. Теперь остаётся сложить все цифры в колонке «Число матчей» – и ответ готов!

Правильно, конечно, но уж больно длинно. Нельзя ли найти ответ без таблицы и без сложных расчётов? Одним махом! А?

В

Ответ прост: число всех матчей равно числу заявок минус единица! Надо считать не те команды, которые побеждают, а те, которые выбывают. После каждого матча выбывает одна команда: в этом, собственно, и состоит назначение каждого матча. Следовательно, надо сыграть $16\,389 - 1 = 16\,388$ матчей, чтобы осталась одна команда-победительница. Вот и всё!

Конечно, не следует умалять и роли графика и таблицы. Они позволяют ответить на многие другие интересные вопросы. Так, из таблицы видно, что для завоевания кубка нужно выиграть не так уж много матчей, как это могло показаться вначале, – всего лишь 15 (и то это относится только к тем десяти командам, жребий которых оказался менее счастливым; остальным же достаточно победить 14 раз). Из гра-

фика видно даже, кому с кем предстоит встречаться на каждой ступени… если на неё удастся взобраться. Всё это полезно и интересно, но всё это лишнее в рамках поставленной задачи.

109. Народные приметы

А

Приметы есть разные. В некоторых из них заключён многовековой опыт народа. Некоторые поддерживаются суеверными людьми. Есть и приметы-шутки: «Не садись за столом напротив угла: семь лет замуж не выйдешь!» Вам предлагаются три известные приметы:

1. Бутерброд на пол падает обязательно маслом вниз.
2. Две бомбы в одну воронку не падают.
3. Журавли осенью летят на юг в холодный день.

Есть ли в этих приметах рациональное зерно?

Б

Вместо подсказки будем искать это зерно на примере первой приметы.

Итак, «закон бутерброда». Лучший способ исследования в смысле объективности – поставить эксперимент. Нужно ронять на пол бутерброды до тех пор, пока вы не придёте к определённому выводу. Но это негигиенично, неэкономично и неэтично. Верный результат можно получить и с помощью мысленного эксперимента. Правда, при условии, что вы умеете доводить мысленный эксперимент до конца.

Представим, что мы роняем бутерброд с достаточно большой высоты, чтобы в воздухе он перевернулся достаточно большое и непредсказуемое число раз. При этом можно считать равными шансы, что он при падении сделает целое число оборотов или на пол-оборота больше (меньше). В первом случае он упадёт маслом вверх, во втором – вниз (если исходное состояние – вверх). Оговоримся, что под целым числом n мы понимаем результат округления угла поворота $n \cdot 360° \pm \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha < 90°$, под нецелым – $\left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot 360° \pm \Delta\alpha$, иначе мы упустим из рассмотрения все промежуточные случаи, составляющие большинство.

Вторая оговорка. В само́м бутерброде при его падении не возникает никаких сил, которые давали бы предпочтение одной из двух ситуаций: трение воздуха о масло и о хлеб одинаково, плотность хлеба и масла одинакова (хлеб, «намазанный» толстым слоем золота, стремился бы перевернуться золотом вниз).

Итак, вероятности обеих ситуаций одинаковы и равны 0,5 и 0,5. И примета неверна?

А довели ли вы свой мысленный эксперимент до конца? Давайте понаблюдаем (мысленно) за бутербродом дальше. Ударившись о пол, он имеет намерение подпрыгнуть, так как хлеб упруг. Если он упал маслом на пол, то подпрыгнуть ему не удастся: масло вязкое и липкое. Если же он упал маслом вверх, то обязательно подпрыгивает. Подпрыгивая, он может перевернуться или не перевернуться. Пусть шансы этих событий тоже одинаковы. Если перевернётся – прилипнет. Тогда вероят-

ность того, что он после подпрыгивания оказывается маслом вверх, составляет 0,5 от 0,5, т.е. 0,25 (если бы подпрыгиваний было несколько, то шансы остаться маслом вверх были бы ещё меньше). А вероятность того, что он будет лежать маслом вниз, – остальное, т.е. 0,75. Мы пренебрегаем вероятностью того, что бутерброд окажется стоящим на ребре. Кстати, любопытная деталь: ломоть, отрезанный от батона, как правило, имеет вид усечённого конуса, и намазывают маслом обычно его более широкое основание; при падении на ребро у него больше шансов перевернуться вниз меньшим основанием, т.е. маслом вверх, однако этот эффект невелик.

Итак, в примете есть смысл. Хотя и не всегда, но всё-таки в большинстве случаев бутерброд падает маслом вниз. Эта примета, как и многие другие, иллюстрирует так называемый принцип максимального невезения, имеющий шутливую формулировку: «Если какая-нибудь неприятность может случиться, то она обязательно случится, причём в наихудшем из возможных вариантов». Разумеется, принцип максимального невезения – шутка, но очень многие принимают его всерьёз: случаи, когда всё идёт как надо (бутерброд вообще не падает), не запоминаются, а как не надо – запоминаются и влияют на мнение субъективных людей.

В

Вторая примета: две бомбы в одну воронку не падают – имела широкое хождение среди солдат на фронте и многим из них спасла жизнь, так как воронки использовались как укрытия.

Представим, что бомбы освобождаются с интервалом 1 с из бомболюка самолёта, летящего на высоте 300 м со скоростью 300 м/с. Тогда действительно они не будут падать в одну воронку, а будут ложиться почти правильной цепочкой, лишь слегка искажённой неравномерностями полёта, неоднородностями воздуха и небольшими различиями в форме бомб и их стабилизаторов. Но использовать воронку для укрытия от бомб именно этого самолёта уже поздно: предназначенная нам бомба уже взорвалась, а остальные взорвутся далеко.

Второй крайний случай: бомбы сбрасываются с неподвижно висящего вертолёта. Тогда вероятность попадания второй бомбы в воронку первой наибольшая: больше, чем вероятность попадания в любой другой круг той же площади. Как говорят, между первым и последующим попаданиями существует корреляция: между случайностями проступает заметная закономерность. Однако этот случай бомбёжки нетипичен.

Более типично, когда бомбы падают со многих самолётов в моменты, не связанные между собой. Тогда в пределах атакуемой площади попадания бомб в каждый квадратный метр равновероятны. После того как появилась первая воронка, характер бомбёжки не изменился. Поэтому каждая новая бомба может по-прежнему поразить любой квадратный метр с той же вероятностью, в том числе и тот, на котором уже есть воронка. Следовательно, в наиболее типичном случае примета неверна. Она держится просто на малой вероятности совпадения двух воронок: если атакуемая площадь равна $S = 1\ \text{км}^2$, площадь воронки $S_1 = 10\ \text{м}^2$ и число сброшенных бомб $N = 1000$, то изрытая воронками площадь NS_1 составит примерно 1% от S, а поэтому вероятность перекрытия двух воронок будет очень мала. Тем не менее, перекрытий будет около десяти (1% от 1000). Более точные результаты можно получить методами задачи о встрече (см. задачу «Спортлото и жизнь на других планетах»).

Автор не может привести документальный снимок, подтверждающий эти рассуждения: он был моряком-зенитчиком, и когда его бомбили, он не фотографировал, так как у него других дел было по горло. К тому же на воде воронки не сохраняются. Однако ничто не изменится, если мы снимок военной бомбежки заменим снимком космической.

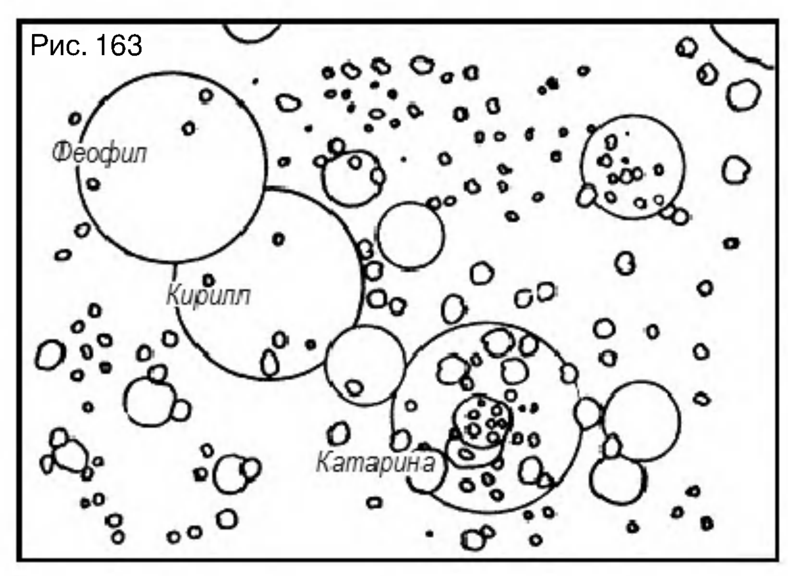


Рис. 163

На рис. 163 приводится схематизированная копия с фото одного района поверхности Луны: район кратеров Феофил, Кирилл и Катарина, рядом с Морем Нектара. Существуют две конкурирующие гипотезы происхождения лунных кратеров. Одна утверждает, что они – воронки от взрывов метеоритов – камней, летевших с космической скоростью и взорвавшихся от мгновенной остановки при ударе о Луну. Вторая считает большинство воронок кратерами вулканов, в основном давно потухших. Мы не будем вникать во все «за» и «против»; скорее всего, для части воронок верна одна гипотеза, для остальных – другая.

В случае метеоритной гипотезы полная независимость расположения воронок гарантирована. Камни падают на Луну случайным образом и по месту, и во времени: бомбардировка длится не первый миллиард лет. И вы видите результат – воронки всех калибров. Рассматривая рис. 163, нетрудно прийти к выводу, что каждый метеорит, падая на Луну, ничуть не беспокоится о том, падали до него метеориты в выбранную им точку или нет. Воронки довольно часто перекрываются. Особенно в этом смысле досталось кратеру Катарина: на нём можно увидеть даже «четырёхэтажные» нагромождения кратеров одного на другой. Но произошло это случайно, преднамеренной бомбёжки этого кратера не было. Скорее всего, Катарина – более древний кратер, чем Кирилл и Феофил. Если Феофил образовался позднее, то он смёл все следы предыдущих воронок, и на нём видны только кратеры метеоритов, упавших после того, как он образовался.

Разумеется, при вулканической гипотезе между некоторыми кратерами может быть существенная корреляция. Можно представить, что в коре Луны вдруг образуется длинный разлом, вдоль которого одновременно возникает множество вулканов (нечто подобное в сентябре 1975 г. происходило с камчатским вулканом Толбачик). Линией разлома они будут связаны в цепочку, которую полностью случайной уже не назовёшь.

Так что же, солдаты зря использовали воронки как укрытие при бомбёжке? Конечно, не зря. Хотя вероятность попадания каждой отдельной бомбы в любую точку, в том числе и в воронку, в течение бомбёжки не меняется, но вероятность поражения цели меняется. Бомба опасна не столько прямым попаданием в человека (это маловероятно), сколько разлетающимися осколками. Если бомбёжка застигла в чистой ровной степи, то от осколков первых бомб будут большие потери, но после того,

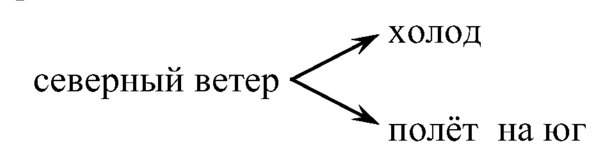
как первые воронки превратили ровную степь в неровную, появляется возможность укрытия от осколков.

Рассмотрим третью примету. Проверить её экспериментально, увы, очень трудно: в наше время журавлей осталось так мало, что для получения надёжных результатов наблюдения пришлось бы вести всю жизнь. Нам надо много поработать, для охраны наших современников и соседей по планете, чтобы наши потомки и потомки наших журавлей могли любоваться друг другом. Мы же можем лишь довериться утверждениям наших предков, которым верить можно хотя бы потому, что они видывали журавлей побольше нашего и, кроме того, чаще смотрели в небо, чем в телевизор.

Есть ли связь между холодной погодой и полётом журавлей на юг? Связь эту называют немедленно: журавли улетают от холодов в тёплые края. Но почему именно в холодный день? Почему, если завтра день будет тёплым, то они свой перелёт прервут? Ведь осень от этого не перестаёт приближаться! Видимо, связь холод–полёт не такая прямая.

Здесь правильный ответ можно получить с помощью такого мысленного эксперимента: нужно представить себя на месте журавля, влезть, так сказать, в его шкуру. И вы сразу все поймёте.

Уже поняли? В тёплый день, как правило, дуют южные ветры. Лететь в такой день на юг – значит лететь против ветра. Это неразумно. В холодные же осенние дни ветер, как правило, северный и, следовательно, попутный. Холод не является причиной полёта. Прямой причинно-следственной связью является цепочка:



Как видите, холод и полёт не причина и следствие, а два равноправных следствия одной причины – северного ветра.

Эти рассуждения можно проверять не только осенью, но и весной: на север журавли должны лететь преимущественно в тёплую погоду. Это подтверждается наблюдениями.

Если вы вошли во вкус, то берите сборник народных примет и анализируйте каждую из них. Польза для вас будет огромной. Ведь примета – это скромно сказано. На самом деле это не что иное, как научная гипотеза, нуждающаяся в доказательстве или опровержении.

110. Две гитары

А

Гитару, на которой струны оказались отпущенными, вы настраиваете по какому-либо другому инструменту, принятому за эталон (например, по соответствующим струнам другой гитары). Настроив первую (самую тонкую) струну так, что её звуковой тон совпадает с эталонным, вы настраиваете точно так же седьмую струну. Почему же после настройки седьмой струны первая оказывается расстроенной (тон её понижается)?

Б

– Остаточная деформация, говорите? Ничего подобного! Отпустите седьмую струну до исходного состояния – и первая опять окажется настроенной. Значит, это упругая деформация.

В

Частота колебаний струны́ (и её музыкальный тон) тем выше, чем больше её натяжение. В процессе настройки седьмой струны мы растягиваем её и этим самым, согласно третьему закону Ньютона, сжимаем гриф, отчего последний укорачивается (и прогибается, потому что сжимающая его сила струны приложена в стороне от оси грифа). Вместе с укорочением грифа ослабевает натяжение первой струны, настроенной ранее, – и её тон понижается. Сто́ит, однако, вновь ослабить седьмую струну, как гриф распрямляется и вновь натягивает первую струну, повышая её тон. Седьмая струна самая толстая, и поэтому её влияние на деформацию грифа наибольшее. Поэтому настройка по эталону быстрее осуществляется, если её начать с самой толстой струны.

Укорочение грифа и расстройка струны невелики. Однако наше ухо является очень чувствительным индикатором частоты звука, что позволяет обнаружить малейшую расстройку.

По величине расстройки, очевидно, можно определить степень сжатия грифа, сжимающую силу, напряжение в материале грифа. Этот принцип используется в технике для измерения напряжений в материалах. На его основе построены так называемые струнные тензометры (измерители напряжений). Важными их достоинствами являются высокая точность, а также лёгкость передачи показаний на большие расстояния, благодаря чему эти приборы можно размещать в недоступных для человека местах. Так, например, при строительстве Днепрогэса (Запорожье) сотни струнных тензометров конструкции инженера (впоследствии академика) Н.Н. Давиденкова были помещены в бетон плотины и передавали на контрольный пункт сведения о напряжениях в бетоне в процессе его схватывания и последующей эксплуатации плотины.

Опишем коротко один из способов передачи показаний тензометра на расстояние. Струна тензометра располагается между полюсами электромагнита, питаемого переменным током, частоту которого можно плавно менять. Под действием переменного магнитного поля стальная струна начинает колебаться. Амплитуда колебаний струны оказывается максимальной, когда частота тока, питающего электромагнит, совпадает с частотой собственных колебаний струны (а последняя зависит от напряжения в том месте бетона, где установлен прибор). Кроме раскачивающего электромагнита, рядом со струной располагают второй – «слушающий». Колеблющаяся струна возбуждает в его обмотках э.д.с., которую по проводам можно передать на большое расстояние и подать там на индикатор амплитуды. Частота тока, питающего электромагнит в момент, когда амплитуда достигает максимального значения, будет мерой напряжения.

111. Спортлото и жизнь на других планетах[1]

А

Читая научную литературу, иногда встречаешь утверждения, вызывающие острое желание испытать их на прочность. Это можно сделать многими путями. Один из них – проверка предпосылок, следствием которых является утверждение. Другой – извлечение следствий из самого утверждения и их анализ на правдоподобие. Если они оказываются правдоподобными, то это увеличивает шансы на правильность утверждения, в противном случае – ставит его под сомнение.

Вот одно из утверждений, достаточно далеко идущих и поэтому интригующих. Н. Рашевский вычислил общее количество различных биологических видов N, существование которых, по его мнению, принципиально возможно.[2] По этим расчётам, $N = 10^8$.

Это число первым путём проверить трудно: мы недостаточно компетентны в биологических предпосылках и математических методах, которыми оно получено. Пойдём вторым путём: будем извлекать следствия, считая $N = 10^8$ правильным, и посмотрим, что из этого получится.

На Земле в данное время имеется около 2 млн. видов[3] (1,5 млн. видов животных и 0,5 млн. – растений), т.е. в 50 раз меньше, чем их может быть вообще. Если же учесть, что многие виды существовали раньше, но вымерли, и на всю длительность эволюции накинуть ещё 2 млн. видов, то всего на Земле уже реализовано $n = 4 \cdot 10^6$ из $N = 10^8$ возможных.

Н. Рашевский выдвигает смелую гипотезу, что биологическая система (в дальнейшем, для краткости, – биология) другой планеты может состоять из других видов, входящих в названное число N. Мы принимаем и эту мысль, потому что она правдоподобна и, кроме того, что уж совсем ненаучно, она нам нравится.

Давайте, однако, решим такую задачу. Поскольку, по-видимому, жизнь на планетах у разных звёзд возникала независимо, то, скорее всего, многие виды у обеих биологий неодинаковы, но есть шанс, что некоторые из видов совпадут.

Будем считать, что обе биологии обладают одинаковой мощностью $n = 4 \cdot 10^6$, и найдём вероятность того, что вторая биология перекрывается с земной хотя бы в одном из видов.

Сведения по теории вероятностей, которые нам понадобятся, настолько элементарны, что они найдутся практически у каждого из вас.

Б

Событие A: «Две биологии перекрываются хотя бы в одном из видов» – очень сложное, оно распадается на множество более простых:

---

[1] Задача опубликована в 4-м издании («Наука», 1979) – *Прим. составителя документа*.

[2] *N. Rashevsky*. «Topology and Life», «Bulletin of Mathematical Biophysics», 1954, v. 16, p. 317; краткое изложение – в книге И.А. Акчурина «Единство естественнонаучного знания», «Наука», 1974, стр. 108.

[3] «Общая биология», учебник для 9-10 классов, под ред. Ю.И. Полянского, «Просвещение», 1973, стр. 10.

A_1:	совпадают	пшеница	пшеница (а остальные нет)
A_2:	– " –	мухомор	мухомор (а остальные нет)
A_3:	– " –	карась	карась (а остальные нет)
A_4:	– " –	динозавр	динозавр (а остальные нет)
A_5:	– " –	мухомор + карась	мухомор + карась (а остальные нет)
A_6:	– " –	уж + ёж + чиж	уж + ёж + чиж (а остальные нет)

и т.д. вплоть до полного совпадения по всем видам.

Подсчитать $W(A)$ – вероятность события A – значит подсчитать её для всех взаимоисключающих вариантов A_i и затем сложить. Это громоздко. Проще вычислить вероятность противоположного события $\bar{A}$ и потом, воспользовавшись тем, что прямое и противоположное события составляют полную группу событий A и $\bar{A}$, для которой $W(A) + W(\bar{A}) = 1$, найти $W(A)$ из формулы

$$W(A) = 1 - W(\bar{A})\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Итак, $W(\bar{A})$ есть вероятность того, что *ни один* из видов биологии-2 не совпадает с соответствующим видом биологии-1 (земной). Задача несколько прояснится, если мы предварительно решим похожую, другую, более житейскую и с меньшим числом возможных исходов.

Как известно, в карточке спортлото всего $N = 49$ номеров, подчеркнуть нужно $n = 6$ номеров (чем больше угадаешь, тем больше выигрыш). В данном случае $W(A)$ есть вероятность того, что вы угадаете хотя бы один номер (т.е. или один, или два, …, или шесть). Здесь противоположное событие $W(\bar{A})$ есть вероятность того, что вы не угадаете ни одного номера.

Аналогия будет понятнее, если мы будем считать, что тираж уже состоялся, 6 некоторых номеров уже выиграли, отмечены в тиражной таблице, но нам результаты ещё не известны (угадывать до тиража принято только во избежание злоупотреблений). Земная биология есть таблица на 10^8 номеров, по которой «тираж» уже состоялся: $4 \cdot 10^6$ номеров (видов) уже выиграли, остальные – нет. Биология-2 «подчёркивает» свои номера, ничего не зная о том, какие номера выиграли у нас.

B

Итак, в таблице спортлото подчёркнуты (или будут подчёркнуты) неизвестные нам 6 номеров из 49. Подчёркивая в своём билете наугад одну из цифр, мы имеем 6 шансов из 49 угадать, а остальные $49 - 6 = 43$ – не угадать. Вероятность не угадать при первой попытке

$$W_1(\bar{A}) = \frac{43}{49}\,.$$

Вероятность не угадать ни одного номера в двух попытках

$$W_2(\bar{A}) = W_1(\bar{A})\,W_2(\bar{A}/\bar{1})\,, \qquad \textbf{(2)}$$

где $W_2(\bar{A}/\bar{1})$ – вероятность не угадать во второй попытке при условии, что мы не угадали в первой.

Легко видеть, что

$$W_2(\bar{A}/\bar{1}) = \frac{48 - 6}{48} = \frac{42}{48}\,.$$

В самом деле, теперь мы подчёркиваем один из 48 номеров (а не 49): не будем же мы ещё раз подчёркивать уже подчёркнутый номер; в числителе вычитается по-прежнему 6, потому что мы исходим из условия, что не угадали в первый раз (условие $\bar{1}$, см. выше):

$$W_2(\bar{A}) = \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48}.$$

Аналогично

$$W_3(\bar{A}) = \frac{43}{49} \cdot \frac{42}{48} \cdot \frac{41}{47}.$$

И, наконец

$$W_6(\bar{A}) = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} = \frac{4\,389\,446\,880}{10\,068\,347\,520} \approx 0{,}44\,. \quad \textbf{(3)}$$

Итак, в спортлото шансы не угадать вообще ни одного из шести номеров довольно велики: 44 из 100. Очевидно, вероятность угадать хотя бы один номер

$$W(A) = 1 - W(\bar{A}) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56\,.$$

Для упорядочения записи домножим числитель и знаменатель формулы **(3)** на два факториала:

$$W_6(\bar{A}) = \frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39 \cdot 38}{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44} \cdot \frac{43!}{43!} \cdot \frac{37!}{37!}.$$

После очевидных упрощений

$$W_6(\bar{A}) = \frac{43!\,43!}{49!\,37!} = \frac{(N-n)!\,(N-n)!}{N!\,(N-2n)!}.$$

Теперь перейдём к биологии. Здесь вместо шести сомножителей-дробей в формуле **(3)** их будет четыре миллиона:

$$W(\bar{A}) = \frac{10^8 - 4 \cdot 10^6}{10^8} \cdot \frac{10^8 - 4 \cdot 10^6 - 1}{10^8 - 1} \cdot \frac{10^8 - 4 \cdot 10^6 - 2}{10^8 - 2} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \frac{10^8 - 4 \cdot 10^6 - 3\,999\,999}{10^8 - 3\,999\,999},$$

или в записи через факториалы:

$$W(\bar{A}) = \frac{(96 \cdot 10^6)!\,(96 \cdot 10^6)!}{10^8!\,(92 \cdot 10^6)!}. \quad \textbf{(4)}$$

Вычислить непосредственно это число вручную – непосильный труд. Для обхода этой трудности существует приближённая формула Стирлинга:

$$m! \approx \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}\left(1 + \frac{1}{12m} + \ldots\right). \quad \textbf{(5)}$$

Относительная ошибка здесь меньше, чем второе слагаемое в скобке, которое при $m = 10^8$; $96 \cdot 10^6$; $92 \cdot 10^6$ составляет около одной миллиардной от всего результата. В конечном итоге ошибка будет ещё меньше, так как после подстановки **(5)** в **(4)** скобки числителя и знаменателя почти точно сокращаются. Поэтому второе слагаемое скобки мы можем отбросить. Кроме того, сокращаются (точно) e и $\sqrt{2\pi}$ и остаётся

$$W(\bar{A}) = \frac{(96 \cdot 10^6)^{96 \cdot 10^6} \cdot (96 \cdot 10^6)^{96 \cdot 10^6}}{(100 \cdot 10^6)^{100 \cdot 10^6} \cdot (92 \cdot 10^6)^{92 \cdot 10^6}} \cdot \sqrt{\frac{96 \cdot 96}{100 \cdot 92}}.$$

Разделив числитель и знаменатель на $(10^6)^{192 \cdot 10^6}$, получим

$$W(\bar{A}) = \frac{96^{96\cdot10^6}\cdot 96^{96\cdot10^6}}{100^{100\cdot10^6}\cdot 92^{92\cdot10^6}}\cdot\frac{96}{10\sqrt{92}} = \left(\frac{96\cdot96}{100\cdot92}\right)^{92\cdot10^6}\cdot\left(\frac{96}{100}\right)^{8\cdot10^6}\cdot\frac{96}{10\sqrt{92}}\,.$$

Теперь окончательный результат нетрудно получить логарифмированием:

$$\lg W(\bar{A}) = 92\cdot10^6(2\lg 96 - 2 - \lg 92) + 8\cdot10^6(\lg 96 - 2) + \lg 96 - 1 - \frac{1}{2}\lg 92 \approx$$
$$\approx 92\cdot10^6(2\cdot1{,}9823 - 2 - 1{,}9638) + 8\cdot10^6(1{,}9823 - 2) + 0{,}0004 \approx$$
$$\approx 92\cdot10^6\cdot0{,}0008 - 8\cdot10^6\cdot0{,}0177 = -68\,000\,.$$

Таким образом:

$$W(\bar{A}) \approx 10^{-68\,000}\,.$$

Остаётся преодолеть одну вычислительную трудность: поскольку мы пользовались четырёхзначной таблицей логарифмов и в скобке вычитались друг из друга близкие числа, то относительная ошибка разности логарифмов существенно превосходит относительную ошибку самих логарифмов. В частности, мы не можем в числе $0{,}0008$ поручиться даже за один-единственный знак, который там есть. Следовало бы взять, например, семизначную таблицу логарифмов, которой, однако, у автора под рукой не оказалось.[1] Но в этой задаче есть возможность поступить иначе. Можно обойтись оценкой числа $W(\bar{A})$ сверху, т.е. таким числом, которое не слишком отличается от $W(\bar{A})$ и в то же время достоверно больше его. Вероятность $W(\bar{A})$ будет наверняка больше истинной, если вместо $0{,}0008$ мы возьмём $0{,}001$ (наверняка большее истинного) и вместо $0{,}0177$ возьмём $0{,}016$ (наверняка меньшее). Тогда

$$\lg W(\bar{A}) < 92\cdot10^6\cdot0{,}001 - 8\cdot10^6\cdot0{,}016 = -36\,000\,.$$

Теперь мы можем утверждать, что

$$W(\bar{A}) < 10^{-36\,000}\,.$$

Обратите внимание на то, что мы отважно идём на преувеличение $W(\bar{A})$ в

$$\frac{10^{-36\,000}}{10^{-68\,000}} = 10^{32\,000} \text{ раз}$$

и тем не менее получаем результат, выводы из которого останутся[2] теми же.

Что это за выводы? Главный: вероятность полного несовпадения двух биологий невообразимо мала. Слово «невообразимо» здесь не для красного словца: число $10^{-36\,000}$ действительно невообразимо. Это число с полным спокойствием и чистой совестью перед нашей конкретной задачей можно считать нулём. И, следовательно, согласно формуле **(1)**

$$W(A) = 1\,,$$

т.е. факт перекрытия двух независимых биологий хотя бы в одном из видов – достоверен[3]. [Должно быть не менее $10^{36\,000}$ биологий, чтобы хотя бы один случай полного несовпадения стал реальным. Но ведь во всей видимой Вселенной звёзд всего

---

[1] Не надо считать автора лентяем: найти семизначную таблицу было бы значительно проще, чем суметь обойтись без неё не в ущерб задаче. Оценка сверху – тоже один из приёмов при вычислениях. Его тоже полезно принять на вооружение.

[2] Кстати сказать, более точный результат (с помощью цифровой вычислительной машины, заменившей десятичную таблицу логарифмов) ещё более впечатляющ: $W(\bar{A}) < 10^{-72\,404}$.

[3] Для любителей математических тонкостей достоверности рекомендую книгу Э. Бореля «Вероятность и достоверность», Физматгиз, 1961.

лишь 10^{21}. Значит, для одного случая полного несовпадения нужно иметь $10^{35\,979}$ *Вселенных* (!!), причём имеющих биологию у каждой звезды.]

Из достоверности этого факта следует парадоксальный вывод: все биологии похожи друг на друга! Ведь совпадение в одном из видов (неважно в каком, пусть даже в вымершем!) делает биологии практически родственными, так как каждый вид родствен всем (или большинству) видам своей биологии, а его двойник в другой биологии – всем видам своей (мы исходим из гипотезы о единстве происхождения всех или хотя бы большинства видов внутри данной биологии[1]). Это, в частности, сильно увеличивает шансы на наличие других цивилизаций и на возможность контакта с ними.

Интересно подсчитать, сколько в среднем видов в двух биологиях оказываются совпадающими. Пусть наша биология является мишенью (по форме напоминающей таблицу спортлото), содержащей $N = 10^8$ квадратиков, из которых $n = 4 \cdot 10^6$ зачернены. Биология-2 делает $n = 4 \cdot 10^6$ «выстрелов» по этой мишени. Стреляет куда попало, но не мимо таблицы (это означало бы, что в биологии-2 существуют виды, не входящие в число 10^8). Сколько в среднем будет попаданий в чёрные квадратики? Поскольку чёрные квадратики составляют $m = n/\mathrm{N} = {}^1/_{25}$ часть всей мишени и стрельба ведётся беспорядочно, то ${}^1/_{25}$ часть всех выстрелов придётся на чёрные квадратики, т.е. число совпадающих видов M составляет ${}^1/_{25}$ от всех существующих в данной биологии:

$$M = nm = \frac{n^2}{N} = \frac{(4 \cdot 10^6)^2}{10^8} = 160\,000\,.$$

Это число может вызвать некоторые сомнения. Для уточнения следовало бы учесть, что при беспорядочной стрельбе возможны и двойные (и тройные) попадания в один квадратик, что в стрельбе естественно, а в биологии не имеет смысла: это означало бы, что «стреляющая» биология уже внутри самой себя содержит два (или три) совпадающих вида.

Но совпадающие виды – это один вид, т.е. совпадающие результаты надо считать за один выстрел. Поэтому более подходящей моделью является такая мишень, из которой после каждого выстрела изымается поражённый квадратик (чёрный или белый), а следующий выстрел обязательно попадает в один из оставшихся квадратиков. Однако эта уточнённая модель даст то же самое. Ведь из-за двойных и тройных попаданий в отдельные квадратики некоторые другие квадратики не получат причитающейся им пули. Поэтому после окончания стрельбы ($4 \cdot 10^6$ выстрелов) M' будет меньше вычисленного M.

Но если подсчитать «излишки» пуль, полученных некоторыми квадратиками, и произвести соответствующее дополнительное число выстрелов (повторяя, если надо, эту процедуру несколько раз), то в пределе мы как раз и получим $M = 160\,000$. Впрочем, M' ненамного меньше M: вероятность двойного попадания в один квадратик равна $m^2 = {}^1/_{625}$, тройного – m^3 и т.д.

Число совпадающих видов $M = 160\,000$ является наиболее вероятным, отклонения от него возможны в обе стороны (теоретически вплоть до $M = 0$ и до $M = n$), однако с помощью теории вероятностей можно показать, что отклонение от M на $10\sqrt{M}$ практически невозможно: вероятность такого события порядка 10^{-50}. Итак,

[1] На Земле бактерии и сине-зелёные водоросли считаются неродственными остальной биологии (животным + растениям). См. стр. 71 упомянутого учебника биологии.

практически достоверно, что $M = 160\,000 \pm 4\,000.$

160 000 совпадающих видов! 160 000 прямых «родственных связей» между двумя биологиями! А ещё надо учесть, что остальные, несовпадающие виды косвенно родственны совпадающим! Можно ли в такой ситуации ожидать, что вторая биология существенно отличается от первой, земной?

Можно сделать и ещё один, самый сенсационный, пожалуй, вывод. Поскольку средняя плотность видов равна n/N, то такова же должна быть в среднем и вероятность совпадения для каждого конкретного вида, в том числе и человека! Пусть α – событие **«совпадение человек – человек (а остальные – как угодно)»**. Тогда

$$W(\alpha) = \frac{n}{N} = \frac{1}{25}.$$

Это очень большая вероятность. А вероятность возникновения цивилизации кажется ещё большей: ведь для этого не обязательно совпадение «человек – человек»; возможно, соседний человеку вид (в нашей биологии отсутствующий) тоже может создать цивилизацию[1]. Но это число не должно нас обольщать: оно основано на средней плотности видов и для одного конкретного вида крайне ненадёжно. Вокруг некоторых из видов пустых мест может оказаться гораздо больше: вполне возможно, что в некоторой биологии будет провал не только в окрестностях вида «человек», но даже отряда «приматы», класса «млекопитающие», а возможно, провал охватывает даже весь тип позвоночных. Возможно даже, что позвоночные – аномалия (на языке теории вероятностей – грубый промах) биологии, т.е. в других биологиях они встречаются крайне редко. Наконец, возможно, что биология – вообще аномалия природы. С другой стороны, цивилизацию, возможно, могли бы построить потомки осьминогов.

Вероятность $W(\alpha) = {}^1/_{25}$ может оказаться существенно ошибочной для одной пары биологий, но если взять большое число биологий, то для них в среднем эта $W(\alpha)$ будет верной. Таким образом, если даже всего биологий в Галактике порядка тысячи, то вероятность того, что ещё какая-нибудь из них, кроме нашей, содержит человека, становится практически равной единице.

Фантасты приучили нас к тому, что на других планетах мы встретим нечто совершенно непохожее на земную биологию. Эта привычка очень сильна́ в нас и заставляет усомниться в правильности наших выводов. Нет ли в них ошибки? А если есть, то где она? Она может быть либо у Н. Рашевского (возможно, число потенциально допустимых видов значительно больше 10^8), либо в наших расчётах, либо в нашей попытке перенести модель спортлото на биологию. Научная этика требует: прежде, чем утверждать, что ошибся предшественник, искать ошибку у себя. Свои расчёты автор проверил многократно, ошибки не нашёл (может быть, найдёт читатель?). То, что мы предполагали одинаковую мощность множеств обеих биологий ($4 \cdot 10^6$), не влияет на вывод о достоверности. Вывод будет тем же, если мощности не равны, а только сравнимы по порядку величины.

---

[1] Вероятность встречи двух цивилизаций может оказаться намного меньше вероятности возникновения каждой из них: по некоторым пессимистическим оценкам (которых автор не разделяет, но обойти молчанием не может), срок существования цивилизаций ограничен, цивилизации смертны. Это значит, что две цивилизации могут не встретиться из-за несовпадения во времени существования (аналогия – задача о встрече X и Y, см. ниже).

Рассмотрим внимательнее модель спортлото. Соответствует ли она биологии? Каждый номер в спортлото выпадает почти независимо от других пяти номеров. Так ли в биологии? Нет! Каждый вид – следствие эволюции некоторого предка и следствие борьбы за существование с современниками. Шесть выигрышных номеров спортлото могут оказаться рассеянными в случайном порядке по всему множеству, состоящему из 49 видов спорта; $4 \cdot 10^6$ видов биологии более или менее связаны происхождением и вряд ли будут разбросаны по всему множеству возможных 10^8 видов.

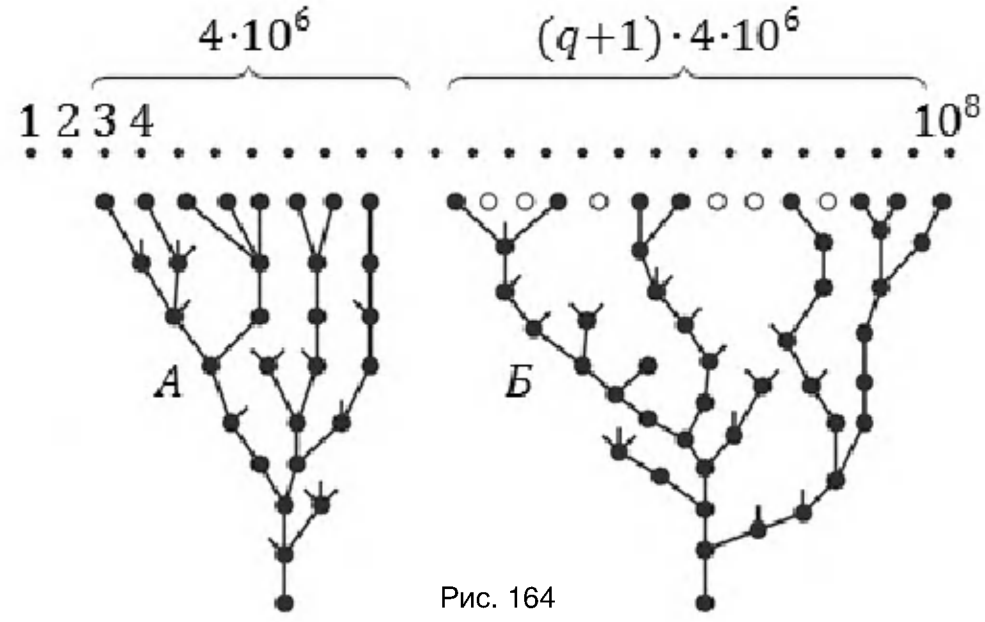


Рис. 164

Допустим, что все $4 \cdot 10^6$ видов данной биологии представляют собой тесную группу (*А* на рис. 164, сравните с рис. 11 в упомянутом учебнике биологии). Тогда задача о частичном совпадении двух биологий напоминает не задачу о спортлото, а известную по многим книгам задачу о встрече. Два лица X и Y условились встретиться в определённом месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждёт второго 10 минут, после чего уходит. Какова вероятность встречи, если X и Y приходят независимо в случайный (в пределах указанного часа) момент?

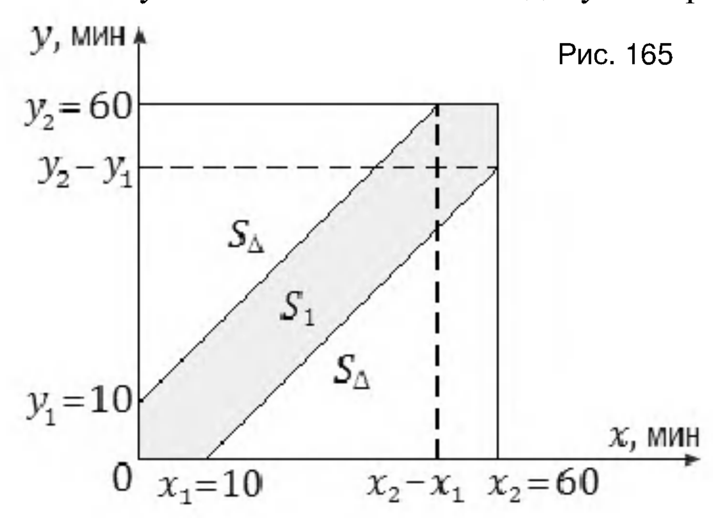


Рис. 165

Обозначим момент прихода лица X через x, лица Y – через y. Встреча состоится, если $|x - y| \leqslant 10$ мин. В декартовой системе координат область выполнения неравенства (на рис. 165 заштрихована) имеет площадь

$$S_1 = S_{\text{квадр}} - 2S_\Delta = 60^2 - 2 \cdot \frac{50^2}{2} = 1100\,.$$

Искомая вероятность

$$W(A) = \frac{S_1}{S_{\text{квадр}}} = \frac{y_2x_2 - 2\,\dfrac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{2}}{y_2x_2} = \frac{N^2 - (N-n)^2}{N^2} = \frac{1100}{60^2} \approx 0{,}306\,.$$

Применив новую модель к нашей задаче ($y_2 = x_2 = N$; $y_1 = x_1 = n$), имеем

$$W(A) = \frac{(10^8)^2 - (10^8 - 4 \cdot 10^6)^2}{(10^8)^2} \approx 0{,}0784\,. \qquad \textbf{(6)}$$

Эта величина кажется более естественной: вероятность, что две биологии не перекрываются, равна

$$W(\bar{A}) = 1 - W(A) \approx 0{,}9216\,.$$

Следовательно, возможны непохожие на нас биологии. С другой стороны, если биологий во Вселенной не две, а сотни, то и вероятность перекрытия многих из них между собой довольно велика. Результат успокаивает и фантастов, и реалистов.

Само собой разумеется, что если $n \geqslant \mathrm{N}/2$, то даже компактные биологии перекрываются достоверно. Они просто не могут не перекрыться: им двоим в пределах N не хватает места! В самом деле, если $N = 10^8$ и, например, $n = 60 \cdot 10^6$, то

$$W(A) = \frac{(10^8)^2 - (10^8 - 60 \cdot 10^6)^2}{(10^8)^2} \approx 0{,}84 \text{ (?!)} \qquad \textbf{(7)}$$

Это что ещё за новость? Вероятность неперекрытия равна $1 - 0{,}84 = 0{,}16 \neq 0$! Как могут две биологии поместиться на отрезке N без перекрытия, если каждая из них занимает более половины этого отрезка? Что-то неладно. Хорошо, что нам пришло в голову проверить то, что «само собой разумеется». Хуже было бы, если бы ошибку обнаружили читатели.

В чём же ошибка? Опять не та модель? Вернёмся к задаче о встрече. Внимательный анализ её показывает, что она действительно имеет не замеченное ранее отличие от нашей задачи. По условиям задачи лицо X (или Y) может прийти на встречу в любое мгновение между 12 и 13 часами, в том числе и в 12 ч 59 мин, и прождать условленные 10 минут. При этом 9 минут ожидания из 10 приходятся на 14-й час и не имеют смысла для увеличения вероятности встречи, но не противоречат условиям задачи. В нашей же задаче по условиям этого делать нельзя: обе биологии должны целиком принадлежать множеству 10^8. Для наших целей задачу о встрече нужно модифицировать. Все условия остаются теми же, кроме одного: самый поздний момент, когда партнёры обязаны явиться, – это 12 ч 50 мин, чтобы все 10 минут ожидания находились внутри 13-го часа. Модификация показана пунктиром на рис. 165. Теперь при $n < \mathrm{N}/2$

$$W(A) = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - 2y_1)(x_2 - 2x_1)}{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)} = \frac{(N - n)^2 - (N - 2n)^2}{(N - n)^2}, \qquad \textbf{(8)}$$

а при $n \geqslant \mathrm{N}/2$

$$W(A) = 1\,.$$

Итак, задача решена. Смущает одно: в нашей модели компактной биологии все $4 \cdot 10^6$ видов поставлены вплотную друг к другу, занимают смежные точки. Но если это так, то как пойдёт дальнейшая эволюция? Существующим видам некуда развиваться. Правда, могут появляться новые виды на краях «генеалогического дерева» (рис. 164*А*), но крайними являются лишь десятки или сотни видов (дерево нужно представлять не плоским, как на рис. 164*А*, а многомерным). Поэтому основная масса видов лишена возможностей развиваться: все потенциально возможные в этой области виды уже существуют. Эволюция закончилась, прогресса больше не предвидится!

В это плохо верится. Видимо, гипотеза о компактной биологии тоже неверна. По существу, два рассмотренных варианта являются двумя крайностями, истина где-

то посредине. Биология более или менее компактна, если она объединена родством происхождения; в то же время между существующими видами должны быть вакантные места, чтобы развитие не остановилось. Крона «дерева» должна быть не такой густой, но зато более раскидистой (рис. 164*Б*). Этого требует дивергенция (см. учебник биологии). Если вокруг каждого существующего вида имеется в среднем q вакантных мест, то вся биология (крона «дерева») раскинута в пределах $(q+1)\cdot 4\cdot 10^6$. Какое число q близко к истине? Автор не берётся ответить на этот вопрос.

Допустим, что $q = 9$, т.е. биология мощностью в $4\cdot 10^6$ видов раскинула крону своего «дерева» на «площади» $(9+1)\cdot 4\cdot 10^6 = 40\cdot 10^6$ из всей возможной площади в 10^8. Тогда, согласно **(8)**, вероятность перекрытия биологий (не отдельных видов, а крон «деревьев»)

$$W(Б) = \frac{(10^8 - 40\cdot 10^6)^2 - (10^8 - 80\cdot 10^6)^2}{(10^8 - 40\cdot 10^6)^2} = \frac{60^2 - 20^2}{60^2} = \frac{8}{9}, \qquad \textbf{(9)}$$

вероятность неперекрытия

$$W(\bar{Б}) = \frac{1}{9}.$$

Нетрудно видеть, что третья биология с такими же n и q уже никак не может быть втиснута в N без перекрытия. И, скорее всего, она будет перекрываться как с первой, так и со второй. Если же биологий во Вселенной много, то подавляющее большинство из них перекрывается со многими другими. Нужно, однако, сделать одну оговорку. Мы ещё не нашли вероятность пересечения видов. Вероятность пересечения видов $W(A)$ в данном случае есть вероятность перекрытия биологий $W(Б)$, умноженная на вероятность пересечения видов $W(A/Б)$ при условии, что биологии перекрываются, т.е.

$$W(A) = W(Б)W(A/Б) \qquad \textbf{(10)}$$

[сравните с формулой **(2)**].

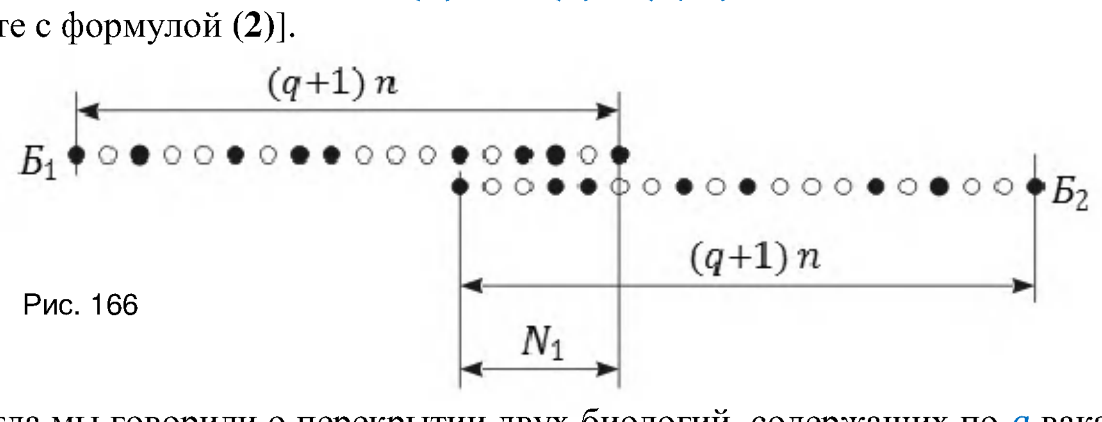


Рис. 166

Когда мы говорили о перекрытии двух биологий, содержащих по q вакансий на каждый вид, то не упоминали о возможности того, что одна биология может перекрываться с другой так, что существующие виды одной будут попадать на вакансии другой. Правда, поскольку вакансии данной биологии находятся в тесной близости к её существующим видам, окружая почти каждый из них, то даже такое «переплетение крон деревьев» без совпадения уже должно говорить о похожести биологий. Но мы этим не удовлетворимся. Мы вычислим второй сомножитель $W(A/Б)$. Если две биологии перекрываются хотя бы на отрезке в $N_1 = 5000$ точек (большинство из которых – вакансии, см. рис. 166), то область перекрытия можно рассматривать как таблицу спортлото (всё-таки она пригодилась!), для которой $N_1 = 5000$ и $n_1 = \dfrac{N_1}{q+1}$ – число номеров, которые нужно подчеркнуть. При $q = 9$ $n_1 = 500$. Тогда

$$W(\bar{A}/Б) = \frac{(N_1 - n_1)!\,(N_1 - n_1)!}{N_1!\,(N_1 - 2n_1)!} = \frac{4500!\,4500!}{5000!\,4000!} < 10^{-20}\,.$$

Обратите внимание: $N_1 = 5000$ составляет лишь одну восьмитысячную часть от каждой из биологий, т.е. в рассмотренном примере относительная ширина перекрытия ничтожно мала. И тем не менее вероятность совпадения видов уже равна

$$W(A/Б) = 1 - W(\bar{A}/Б) > 1 - 10^{-20}\,,$$

т.е. совпадение видов становится таким же практически достоверным, как и при перекрытии компактных биологий (различия между вероятностями 10^{-20} и $10^{-\infty}$ не имеют практического значения). Итак, второй сомножитель в формуле **(10)** равен единице, $W(A) = W(Б)$, и поэтому формула **(9)** даёт правильный результат, упомянутую оговорку можно не учитывать.

Если $q + 1 > 12{,}5$, т.е. вакансий более 92%, то перекрытие двух любых биологий и совпадение некоторых видов обеих биологий достоверно. Поскольку, однако, эти результаты кажутся невероятными, то, видимо, следует пересмотреть в сторону увеличения число $N = 10^8$, полученное Н. Рашевским.[1] И тем не менее очень хочется, чтобы Н. Рашевский оказался прав: тогда биологии разных планет будут обязательно похожими. Это пригодилось бы нам для четырёх следующих задач.

* * *

Данная задача может произвести на читателя странное впечатление. Автор выдвигает одну модель, рассчитывает её, потом спохватывается, бракует модель, просчитывает новую, опять ошибается, вводит в модель изменения, опять бракует её и, наконец, рассматривает модель, почти не отличимую от первой. При этом он то делает определённые выводы, то опровергает их и т.д.

Не удивляйтесь! Всё так и задумано. Изложение этой задачи – попытка показать кухню научной работы, процесс созревания идеи, муки творчества, т.е. то, что при публикации результатов всегда отсутствует. Должен сознаться, мук, зигзагов и ошибок было ещё больше. Однако оставленные за бортом зигзаги и ошибки были уж настолько нелепыми, что публичная их демонстрация ничего, кроме конфуза для автора, не дала бы.

Эта же задача, если бы автор решился опубликовать её в научном журнале, выглядела бы так.

К ВОПРОСУ О ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЗЕМНОЙ И ВНЕЗЕМНОЙ БИОЛОГИИ

Н. Рашевским[2] на основе предложенного им принципа биотопологического эпиморфизма построен топологический комплекс-граф наиболее существенных для всякого живого существа отображений. На основании асимптотических оценок числа графов данного структурного типа он получил общее число различных биологических видов, которые принципиально могут существовать: $N = 10^8$.

Единственная известная нам биология содержит $n = 4 \cdot 10^6$ видов (включая $2 \cdot 10^6$ вымерших). Полагаем вместе с Н. Рашевским, что биологии других планет могут содер-

[1] Недоверие к $N = 10^8$ только усилится, если учесть, что не все виды, существующие и существовавшие на Земле, уже открыты и, возможно, $n \gg 4 \cdot 10^6$. Более того, при конечном N конечна и эволюция, что вызывает философские возражения.

[2] *N. Raschevsky*, «Topology and Life», «Bulletin of Mathematical Biophysics», 1954, v. 16, p. 317.

жать в себе и другие виды из числа N. Рассмотрим вероятность пересечения двух независимых абстрактных биологий равной мощности n, все виды которых принадлежат множеству N.

Мы анализируем три модели биологий.

1. Рассредоточенная биология: все виды двух биологий рассредоточены случайным образом по множеству N (в силу дивергенции). Тогда вероятность того, что ни один из видов биологии-2 не совпадает с соответствующим видом биологии-1 (земной), равна

$$W(\bar{A}) = \frac{[(N-n)!]^2}{N!\,(N-2n)!} < 10^{-36\,000}\,.$$

Ничтожность этого числа означает, что противоположное событие $W(A)$: «две биологии пересекаются (совпадают) хотя бы в одном из видов» – достоверно. Математическое ожидание числа совпадающих видов $M = 160\,000$ со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 400$. Но если это так и если внутри каждой из биологий все n видов (или хотя бы сравнимая с n часть) объединены родством происхождения, то между собой биологии оказываются квазиродственными через совпадающие виды, т.е. между двумя биологиями нет различий, которые можно было бы назвать существенными. В частности, это говорит в пользу того, что вероятность существования внеземных цивилизаций не является малой.

2. Компактная биология: все n видов расположены на множестве N тесной группой (вследствие единства происхождения). Тогда вероятность пересечения двух биологий

$$W(Б) = W(A) = \begin{cases} \dfrac{(N-n)^2-(N-2n)^2}{(N-n)^2}\,, & n \leqslant \dfrac{N}{2}\,, \\ 1\,, & n > \dfrac{N}{2}. \end{cases}$$

Для $n = 4 \cdot 10^6$ $W(Б) \approx 0{,}082$, т.е. умеренна. Однако вероятность пересечения быстро возрастает с ростом числа биологий и при $n_Б > 25$ становится достоверностью.

3. Промежуточная модель: биология близка к компактности (в силу единства происхождения) и в то же время имеет вакантные места (условие продолжения эволюции). Среднее число вакансий на один реализованный вид равно q. Тогда

$$W(A) = W(Б)W(A/Б) = \frac{[N-(q+1)n]^2-[N-2(q+1)n]^2}{[N-(q+1)n]^2} \cdot \left\{1 - \frac{\left[\left(\dfrac{N_1 q}{q+1}\right)!\right]^2}{N_1!\left[\dfrac{N_1(q-1)}{q+1}\right]!}\right\},$$

где $W(A/Б)$ – вероятность совпадения хотя бы одного из видов при условии перекрытия биологий на подмножестве N_1. Даже при очень малых $N_1 \approx \sqrt{n}$ и $q = 9$ второе слагаемое в фигурной скобке имеет величину менее 10^{-20}. В результате $W(A) = W(Б) = {}^{8}/_{9}$. При $q > 11{,}5$ $W(A) = 1$. Поскольку $q = 11{,}5$ нельзя считать слишком большой величиной, то третья, наиболее близкая к реальности, модель биологии даёт практически достоверное пересечение для любых двух биологий.

Итак, две биологии разных планет не могут быть не похожими друг на друга. Этот вывод следует из полученного Н. Рашевским $N = 10^8$ и может оказаться неверным только при $N \gg 10^8$.

П.В. Маковецкий

Как видите, научная статья пишется кратко (потому что она пишется для специалистов и, кроме того, необходимо экономить бумагу). При этом уже не видны творческие муки, статья кажется чудом озарения свыше, так как исчезли промежуточные выкладки и рассуждения, т.е. убрана та лестница, с помощью которой только и мож-

но было добраться до результата. Часто это затрудняет чтение статьи даже специалисту. Правда, при этом экономится бумага, но упускается из виду, что экономить следовало бы не бумагу, а мозги читателей.

Цель нашей книги несколько иная: привить читателям вкус к всестороннему рассмотрению проблемы, показать не только результат, но и путь к нему, равно как и заблуждения, подстерегающие нас в пути.

112. Свидание под часами

А

Есть ли разумные существа на планетах других звёзд или нет их – в этой задаче не доказывается и не опровергается. Мы будем считать, что есть. Более того, будем считать, что они хотят установить с нами связь и делают всё, чтобы осуществить свою мечту. Это входит в условия задачи.

Из физики нам известно, что из всех электромагнитных волн для межзвёздной связи наиболее подходят радиоволны. Ещё конкретнее: диапазон волн от 3 до 100 см, где уровень космических помех минимален. Это доказано земными учёными, и не видно причин, по которым учёные внеземных цивилизаций (ВЦ) могли бы прийти к другим выводам. По крайней мере, это можно допустить для нашей задачи.

Добавим ещё одно важное условие. Не только ВЦ хочет контакта с нами, но и мы хотим контакта с ВЦ. Более того, ВЦ уверена, что мы хотим контакта с ней. Ещё более того: ВЦ уверена, что мы уверены, что ВЦ уверена, что мы хотим контакта с ней. И мы уверены, что ВЦ уверена и т.д.

На какую конкретную волну (частоту) вы посоветуете настроиться, чтобы шансы на контакт были наибольшими?

Б

Казалось бы, о чём тут думать! Ищи по всему диапазону – и найдёшь. Диапазон-то менее метра! А все радиовещательные диапазоны (порядка двух километров, т.е. значительно длиннее) можно обыскать за 10-15 минут.

Трудности станут яснее, если вспомнить, как сильно разнится число радиостанций на длинных волнах и на коротких: на длинных значительно больше метров, а на коротких – станций. Дело в том, что под каждую станцию отводится определённый отрезок не на шкале волн, а на шкале частот. Если какая-то станция рассчитана на передачу всего диапазона рояля (см. задачу «Просим к роялю!»), то ей требуется полоса частот не менее 10 000 Гц. Зная, что

$$f = \frac{c}{\lambda},$$

где f – частота, c – скорость радиоволны, λ – длина волны, мы легко подсчитаем, что на волнах длиннее 1 км можно разместить впритирку 30 роялей, а на волнах от 3 см до 1 м – порядка миллиона!

Сигнал ВЦ может быть намного узкополоснее, чем у рояля. Дело в том, что при прочих равных условиях дальность действия тем выше, чем медленнее передается информация. Тогда полосу частот можно выбрать более узкой, и в неё пролезет меньше помех. Но чем у́же полоса канала, тем медленнее нужно перестраивать при-

ёмник от канала к каналу, чтобы обнаружить сигнал с наибольшей гарантией. Приближённая связь между временем τ на обнаружение данного канала и его полосой Δf такова:

$$\tau \approx \frac{1}{\Delta f}.$$

Представим, что ВЦ (знающая теорию связи не хуже нас) передаёт сигналы с шириной полосы 1 Гц (возможно, и в тысячу раз медленнее!). Тогда на просмотр одного канала требуется не менее $\tau = 1$ с (возможно, и в тысячи раз больше!), а на поиск по всему диапазону – порядка 10^{10} с ≈ 300 лет (возможно, и в миллион раз больше!). Создается ситуация, подобная той, что была в задаче «Сегодня же к Проксиме Центавра!»: чем пороть горячку и сразу приступать к действиям, лучше, не торопясь, подумать, как упростить задачу.

Итак, надо попытаться угадать волну: какие меры примет ВЦ, чтобы облегчить нам встречу с ней в безбрежном эфире?

Я вижу, что многие из вас беспомощно остановились и намерены махнуть рукой на задачу. Не сдавайтесь! Дерзайте! Ведь вы представители Земной Цивилизации! Перед лицом Вселенной не ударим в грязь лицом!

Начните с задачи попроще. Двое подружились (в туристическом походе, например) и договорились 1 сентября в 15:00 встретиться в Ленинграде[1]. Но забыли назвать точное место встречи. И никакой информации друг о друге, которая могла бы помочь уточнить место свидания, у них нет. Они только знают, что оба будут стараться встретиться. Куда они пойдут в назначенный час?

B

Трудность задачи состоит в том, что место встречи – Ленинград – слишком обширно (так же как и диапазон радиоволн для встречи двух цивилизаций).

Не весь Ленинград равноценен как место встречи. Разные точки его имеют различную притягательную силу, различную степень знаменитости. Если вы выберете несколько наиболее известных точек и то же самое сделает ваш друг, то велики шансы, что некоторые из точек окажутся общими! Если вы затем проанализируете список более тщательно, то, возможно, обнаружите и единственную, самую перспективную, самую ценную для вас точку. Если у вашего друга представления о ценности те же, что и у вас, то и он выберет ту же точку.

Автор делал опрос большого числа людей. Вот их ответы (по порядку большинства голосов):

1. Медный Всадник.
2. Не знаю.
3. Смольный.
4. Колонна на Дворцовой площади.
5. Арка Главного штаба.
6. Петропавловская крепость.
7. Набережная Невы.

---

[1] Ленинград мы выбрали для задачи потому, что он знаком многим из читателей непосредственно, остальным – косвенно. Знания о Ленинграде помогут решить задачу. Впрочем, вы можете её решать на примере любого другого города.

Да, это действительно перспективные ответы (кроме № 2), причём среди названных вариантов возможен дальнейший осмысленный отбор. Набережная Невы не точка, а линия, положения точки свидания на ней не определено. По аналогичным причинам малы шансы Петропавловской крепости и Смольного: у них слишком большая площадь. Из оставшихся же объектов наиболее популярен Медный Всадник, и, видимо, к нему и следует идти на свидание с другом. Гарантии, что встреча состоится, нет, но шансы на встречу довольно большие.

В маленьком городке, единственной достопримечательностью которого являются вокзальные часы, принято встречаться под часами. В деревне моей юности часов не было, самым знаменитым местом был колодец.

Для дальнейшего полезно подытожить предпосылки успеха:

1. Обе стороны стремятся встретиться.

2. Обе стороны стремятся угадать наиболее вероятный ход мыслей друг друга.

3. Обе стороны знают особенности той области неопределённости (в данном случае Ленинграда), в которой им предстоит искать.

4. Обе стороны одинаково оценивают каждый из вариантов места встречи. Для удачи достаточно, чтобы обе стороны приписали наибольшую цену одному и тому же объекту, тогда оценки остальных объектов безразличны. В этом случае срабатывает «телепатическая» связь (через объективную реальность – Ленинград, – одинаково известную обеим сторонам): я уверен, что он уверен, что я уверен, что Медный Всадник – наиболее подходящее место встречи, а поэтому отвергаю всё остальное и иду к Медному Всаднику.

Автор уверен, что выражение «я уверен, что он уверен, что я уверен, что Медный Всадник (МВ)…» кажется неряшливым. Тем не менее оно использовано в задаче уже дважды. Это значит, что без него обойтись нельзя, Это не неряшливость, а особая логическая конструкция.

Утверждения «я уверен, что МВ…» (обозначим его как A_1) и «он уверен, что МВ…» ($Б_1$) равноправны, потому что в равной мере способствуют встрече. Они необходимы для того, чтобы встреча состоялась. Но недостаточны! Потому что *он ещё не уверен*, что я уверен, что МВ… (он уверен в A_1), а *я ещё не уверен*, что он уверен, что МВ… Эта *неуверенность* осложняет задачу и может повлиять на выбор точки встречи. Поэтому утверждения

«он уверен, что я уверен, что МВ…», $Б_2(A_1)$

«я уверен, что он уверен, что МВ…» $A_2(Б_1)$

дают дополнительную пользу при решении задачи, так как являются дополнительными знаниями, отличными от A_1 и $Б_1$.

Новую пользу даёт утверждение

«я уверен, что он уверен, что я уверен, что МВ…» $A_3(Б_2(A_1))$

Наилучшими для решения задачи были бы утверждения типа

$$A_n(Б_{n-1}(\dots(Б_3(A_2(Б_1)))\dots)), \text{ где } n \to \infty. \quad \mathbf{(1)}$$

Такие утверждения недостоверны, но имеют степень правдоподобия тем более высокую, чем выше популярность одной точки встречи над всеми остальными. В пределе они, создавая эффект *сближения хода мыслей* обеих сторон, могли бы обеспечить достоверную встречу.

Отметим интересную аналогию между ходом мыслей в формуле **(1)** и поведением системы двух зеркал, описываемым рис. 138 (см. задачу «Марафон между зеркалами»): и там и здесь с увеличением числа n всё более подчеркивается наиболее сильный объект (спектральная линия f_2 на рисунке) и ослабляются остальные.

Любопытно также, что если два зеркала разные (серебряное A и золотое $Б$) и главные максимумы их частотных характеристик различны, то после отражения от обоих зеркал главный максимум системы $f_{AБ}$ может оказаться отличным от главных максимумов отдельных зеркал. При дальнейших отражениях будет подчёркиваться именно он.

Для нашей задачи это равносильно тому, что два участника распределили «популярность» между разными точками по-разному: у них несколько *различные образы мышления* (представляете, насколько это актуально для встречи двух цивилизаций!). Если они будут упрямо придерживаться своих точек зрения (эгоцентризм), то никогда не встретятся. Им следовало бы применить более гибкую тактику: упорно, каждый день, ходить на свидание, но не в одну точку, а во все, чаще наведываясь в наиболее популярную (по их субъективному мнению) и реже в другие (пропорционально популярности последних). Встреча в конце концов состоится, причём вероятнее всего именно в той точке $f_{AБ}$, для которой максимально *произведение* субъективных популярностей, назначенных каждой из сторон. Вероятность встречи за k попыток можно найти с помощью математического аппарата предыдущей задачи. Из соображений экономии бумаги в подробности не вдаёмся.

Отметим также, что каждое отражение данным зеркалом кванта определённой частоты можно рассматривать как приход на встречу данного участника в определённую точку, а каждое поглощение – как неявку. Но это уже совсем другая аналогия, которая много может сказать только читателю, знакомому с теорией статистических решений.[1]

Может показаться, что изложенным угадыванием мыслей на расстоянии автор льёт воду на мельницу телепатии. Ведь именно она претендует на решение проблемы контакта типа

сознание ↔ сознание.

Правда, даже телепаты назовут эту формулу идеализмом. Они утверждают, что владеют другим, материалистическим методом:

сознание ↔ {неизвестный физический канал} ↔ сознание.

Но пока что нет ни одного научного экспериментального подтверждения существования этого канала. А то, что рассматриваем здесь мы, существует:

сознание ⇄ {объективная реальность (Ленинград, Галактика)} ⇄ сознание.

Сплошные стрелки (слева направо) символизируют здесь основной пункт материализма – первичность материи и вторичность сознания (и, кроме того, единство происхождения обоих сознаний), пунктирные (в обратном направлении) – познаваемость объективной реальности, Ленинград и Галактика существуют и познаваемы. Итак, всё изложенное выше – не телепатия.

Переходим теперь от встречи двух лиц к встрече двух цивилизаций.

Если бы мы искали непосредственной встречи, то нужно было бы выбрать наиболее характерную точку во Вселенной (или хотя бы в пределах нашей Галактики). Но непосредственные встречи пока что являются фантастикой, в которой ещё нет ничего научного. Встреча же на радиоволне вполне реальна уже сегодня. Таким образом, надо для встречи выбрать точку не в двумерном географическом пространстве (как это было в задаче с Ленинградом), а точку в одномерном физическом «пространстве» – на оси частот. Естественно, что эту ось мы должны изучить заранее так же хорошо, как для решения исходной задачи – Ленинград.

Воспользовавшись, например, книгами Д.Д. Крауса «Радиоастрономия» и Б.А. Дубинского, В.И. Слыша «Радиоастрономия» (обе изданы в 1973 г. издательст-

[1] Есть и другие технические аналогии формуле **(1)**, например, положительная обратная связь в регенеративном приёмнике, однако, чувствуя их интуитивно, автор не видит, как из них извлечь что-либо вразумительное. Желающие могут попытаться сами.

вом «Советское радио»), мы можем составить таблицу всех волн (частот), которые по тем или иным причинам примечательны в диапазоне 3-100 см. Это спектральные линии, излучаемые различными атомами и молекулами межзвёздной среды.

Номер линии	Излучатель	λ, см	f, МГц
1	Нейтральный водород (H)	21	1 420,406
2	Гидроксил (^{16}OH)	18,6	1 612
3		18,02	1 665
4		17,99	1 667
5		17, 4	1 720
6	Гидроксил на изотопе (^{18}OH)	18,35	1 637,52
7		18,33	1 639,47
8	Формальдегид (H_2CO)	6,54	4 593,052
9	Цианоацетилен (HC_3N)	3,3	9 100
10	Ионизированный водород (HII)	6,0	5 008,932
11	Вода (H_2O)	1,35	22 235,1
12	Аммиак (NH_3)	1,26	23 694,48

Самой знаменитой из собранных в таблице радиочастот является частота нейтрального водорода

$$f_{\text{H}} = 1\,420\,405\,751{,}7864\ldots\ \text{Гц}\,.$$

Прежде всего, нейтральным водородом заполнена вся наша Галактика. Следовательно, частота f_{H} известна не только нам, но и всем ВЦ, которые уже достигли радиоэлектронной эры (т.е. изобрели и развили средства, с помощью которых они могут, с одной стороны, обнаружить f_{H} и, с другой, – послать нам сигналы в оптимальном диапазоне).

Во-вторых, водород является первым элементом периодической системы Менделеева и первым элементом периодической системы у любой цивилизации, так как материя одна для всех. Одно это выдвигает частоту водорода на первый план как всеобщую знаменитость.

В-третьих, эта частота в нашей астрономии и в любой другой играет огромную познавательную роль. Так, например, с её помощью (плюс эффект Доплера) установлена и детально исследована спиральность структуры нашей Галактики, недоступная исследованию другими средствами. Радиотелескопы, проделавшие это, – уже, по существу, почти готовые инструменты для посылки (и приёма) сигналов ВЦ на частоте f_{H}.

Другие спектральные линии (см. таблицу) либо слабы, либо излучаются очень ограниченными площадями, т.е. имеют местное, провинциальное значение. Так, линия 2 наблюдается только около инфракрасных звёзд, линия 10 – пока только в некоторых туманностях (Ориона и др.).

Предложение искать сигналы ВЦ на частоте f_{H} высказано впервые в 1959 г. Дж. Коккони и Ф. Моррисоном.[1] Оно оказалось настолько привлекательным, что его сразу же начали использовать. Ф. Дрейк в США на частоте f_{H} обследовал две срав-

[1] См.: Межзвёздная связь: Сборник. – М.: Мир, 1965.

нительно перспективные звезды: ε Эридана и τ Кита.[1] В.С. Троицкий (СССР) на той же частоте обследовал ещё 12 звёзд.[2]

Искусственные сигналы пока не обнаружены, но пусть это вас не смущает. Возможно, выбраны были не те звёзды. Возможно – и те, но у ВЦ был перерыв на обед (см. задачу «Расписание связи с внеземными цивилизациями»).

113. Пароль разума[3]

А

Идея, рассмотренная в предыдущей задаче – частота $f_Н$ как вероятный канал для связи с внеземными цивилизациями (ВЦ), – была революционизирующей идеей для всей проблемы.

Но указать волну для связи – только полдела. Для установления достоверного контакта необходимо, чтобы на этой волне передавалось что-то такое, что мы с уверенностью опозна́ем как сигнал, который не может быть создан природой и может быть лишь искусственным созданием разума. Итак, проблема первого контакта с ВЦ распадается на две части:

1) выбор рабочей длины волны (предыдущая задача);
2) выбор критерия искусственности.

Вам нужно решить вторую часть проблемы: выбрать для ВЦ критерий, признак, по которому земная цивилизация безошибочно определила бы, что принимаемый сигнал – искусственный.

Заметьте, что использованная ранее аналогия о встрече двух лиц теперь не совсем годится: оба партнёра ничего не знают друг о друге, не назначали время и место свидания. Они ищут встречи неизвестно с кем, по общности интересов. Им не так важно конкретное лицо, как возможность взаимопонимания. Очевидно, музыкант, желающий познакомиться с другим музыкантом, должен прийти к Медному Всаднику (или колодцу) с папкой, на которой нарисован большой скрипичный ключ. В этом ключ к решению задачи.

Б

Если бы вся Вселенная обратилась в одно государство, то как не установить повсюду одинаковых законов?

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 94*а*

– Промодулировать частоту $f_Н$ какой-либо общепонятной передачей. Пусть, например, они передадут голосом или морзянкой: «Хэллоу, ребята, мы те, кого вы ищете!»

Абсурдность этого предложения вытекает из того, что ВЦ не знает ни слова «хэллоу», ни слова «ребята», ни азбуки Морзе. Не знает! За это можно поручиться!

---

[1] См.: Межзвёздная связь: Сборник. – М.: Мир, 1965.

[2] *Шкловский И.С.* Вселенная, жизнь, разум. – 3-е изд. – М.: Наука, 1973, с. 240; 5-е изд. – М.: Наука, 1980, с. 269.

[3] Задача опубликована в 4-м издании («Наука», 1979) – *Прим. составителя документа.*

И «хэллоу», и «ребята», и «морзянка» – это языки. Даже в пределах нашей планеты языков несколько тысяч, а если учесть ещё вымершие, то и того больше. Было бы чудом, если бы на другой планете, не имевшей до сих пор контакта с нами, вдруг обнаружился язык, похожий на какой-либо земной.

Учёные отчётливо понимают, что для достижения успеха и мы, и ВЦ сделаем всё возможное, чтобы из сигнала первого контакта, из позывных, которые должны свидетельствовать о разумности посылающего, исключить языки, исключить то частное, антропоцентричное (человекоцентричное), что известно лишь одной, человеческой, цивилизации и не может быть известно другим.

Коккони и Моррисон, предлагая рабочую частоту $f_{\text{Н}}$, предложили и критерий искусственности: «Мы вправе ожидать, что сигнал будет модулирован импульсами… Чтобы быть безошибочно использованным в качестве искусственного, сигнал может содержать, например, последовательность малых простых чисел или простые арифметические суммы». Это намного перспективнее, чем «Хэллоу, ребята».

Всем цивилизациям, похожим на нас хотя бы тем, что им известно радио, известна, так или иначе, и математика. Правда, их математика может по форме, по характеру изложения существенно отличаться от нашей, но содержание её, особенно в фундаменте, должно быть общим с содержанием нашей математики. Очень велика вероятность, что похожие на нас ВЦ знают последовательность простых чисел и, кроме того, думают, что и мы её знаем. Крайне маловероятно, что какие-то естественные процессы (вроде тех, что на пульсарах) создадут последовательность импульсов, случайно отражающую закон простых чисел. Следовательно, эта последовательность может быть паролем разума. Итак, предполагается:

«Частота $f_{\text{Н}}$ модулирована кодом, смысловая информация которого есть последовательность простых чисел». **(1)**

Некоторое время это предположение казалось настолько ясным и простым (а оно и является таковым по сравнению с тем, что предлагалось раньше, в основном, фантастами), что большинство научных статей занималось лишь уточнением его деталей. Однако появляются и новые идеи, способные с ним конкурировать. Попробуем предложить что-либо новое и мы.[1] Не потому, что гипотеза **(1)** до сих пор не подтвердилась. Дальнейший поиск по программе **(1)** необходим. Но поскольку эта программа является всего лишь эффектной догадкой, то есть смысл высказать и другие догадки. Разумеется, такие, которые не хуже **(1)**. Желательно, чтобы лучше. Тогда вероятность удачи будет выше.

Чтобы изобрести что-либо новое, нужно знать недостатки старого и постараться избежать хотя бы некоторых из них. Поэтому проанализируем внимательно содержание гипотезы **(1)**. На какие земные знания она опирается? В формуле **(1)** можно выделить четыре понятия, относящиеся к четырём областям знания. Частота $f_{\text{Н}}$ относится к физике, является физической константой. Модуляция – способ изменения какого-либо из параметров синусоидального колебания частоты $f_{\text{Н}}$ – понятие, принадлежащее земной технике (конкретнее, радиотехнике). Кодирование – преобразование сообщения (в данном случае простых чисел) в форму, удобную для пере-

[1] *П.В. Маковецкий.* «О структуре позывных внеземных цивилизаций». Астрономический журнал, 1976, т. 53, вып. 1, стр. 221.

дачи по данному каналу. Код – это язык, понятный отправителю и получателю. Наконец, четвёртое понятие – ряд простых чисел – принадлежит математике.

Итак, в предположении **(1)** содержатся положения четырёх различных наук: *физики*, *радиотехники*, *лингвистики* и *математики*. Успех может быть достигнут лишь при условии, что все четыре науки одной цивилизации пересекаются с соответствующими науками другой и использованные конкретные идеи лежат на пересечениях.

Нет сомнения, что *физика* у обеих цивилизаций общая: и наша, и их физика изучает объективную реальность Вселенной, бесспорно одну и ту же, потому что Вселенная у нас одна на всех. Поэтому у обеих сторон есть и знания физической константы f_{H}, и уверенность в том, что её знает и вторая сторона.

Почти с такой же уверенностью мы можем говорить и о *математике*: математика – инструмент познания объективной реальности, наука о количественных отношениях действительного мира. Правда, она по мере развития переходит ко всё более абстрактным и, возможно, различным для разных ВЦ формам, однако корни её находятся в объективной реальности. Поэтому нет сомнения, что такие коренные понятия, как ряд натуральных чисел, ряд простых чисел, число π, и многие другие содержатся в математиках обеих цивилизаций.

Сложнее обстоит дело с модуляцией и кодированием. Земной радиотехнике известно несколько десятков различных видов *модуляции*. По мере развития этой отрасли техники будут появляться всё новые и более совершенные виды. Мы не можем поручиться, что радиотехника ВЦ развивалась тем же путём. Скорее всего, не тем. Ведь в отличие от физики, описывающей естественные явления, техника описывает продукты цивилизации, не возникающие в природе сами собой. Значит, на этих продуктах лежит отпечаток исторического пути развития цивилизации. Каждая цивилизация может иметь существенные различия в деталях развития, а возможно, и не только в деталях. Поэтому предполагать, что техника ВЦ повторяет нашу в таких деталях, как амплитудная, частотная, широтно-импульсная модуляция, – явный антропоцентризм. Скорее всего, у них другие виды модуляции, нам пока недоступные (они развивали радиотехнику «с другого конца»). Следовательно, использование модуляции на этапе первого контакта является сомнительной идеей. Это должна понимать и ВЦ, а поэтому и она, и мы должны на этапе позывных постараться обойтись без понятия модуляции.

Ещё более верно это относительно *кодов*. Код – это язык, понятный отправителю и получателю. Разнообразие языков неисчерпаемо. Вспомним развитие цивилизации на Земле. У древних племён разных континентов техника более или менее похожа: все используют огонь, рычаг, нож, стрелу и т.д. В то же время языки этих племён[1] (особенно в словарях) не имеют ничего общего[2]. Следовательно, языки, как

---

[1] Речь идёт о племенах, принадлежавших разным континентам и ещё не имевших контактов. Языки в пределах одного континента испытывают заметное взаимное влияние благодаря миграции. Впрочем, в последние века межконтинентальные контакты делают своё дело и с языками всех континентов. Так будет и с ВЦ, но только после контакта.

[2] Впрочем, есть крайне редкие слова, звучащие почти одинаково у большого числа народов ещё с древности, например «кукушка». Этому есть объяснение: все эти народы слышали знаменитое «ку-ку». Это «ку-ку» является общей для них объективной реальностью, подобно Медному Всад-

Продолжение на следующей стр. ►

продукты цивилизации, разнятся между собой ещё больше, чем материальные орудия производства. Поэтому надеяться угадать заранее коды другой цивилизации – ещё более явный антропоцентризм.

Прежде чем идти дальше, ответим тем, кто задаёт вопрос: «А зачем вообще кодировать информацию? Разве ВЦ хочет засекретить то, что она нам передаёт? Пусть она передаёт всё как есть, без кодирования!» Такой вопрос свидетельствует о том, что задающие его знакомы с кодированием только по детективным кинофильмам, где кодированием и расшифровкой занимаются шпионы и, соответственно, разведчики.

Передавать всё как есть? А что вы хотите этим сказать? Передавать непосредственно мысли? Это называется телепатией. Она ещё не открыла свой канал связи. Но даже взяв какой-либо канал связи: звуковой, световой, радио и т.д., – мы не можем наложить на него непосредственно мысль: мы должны преобразовать мысли в некоторые знаки: звуковые (речь), световые (текст, изображение) и т.д., а на приёмном конце получатель должен преобразовать эти знаки в мысли. Как уже говорилось выше, преобразование сообщения в форму, удобную для передачи по данному каналу, – это и есть кодирование. Даже не желая засекречивать понятие «пять», вы вынуждены писать его в одной из определённых систем знаков:

V	римская цифра	пять	русское слово
5	арабская цифра, десятичная форма	fünf	немецкое слово
0101	двоичная форма	five	английское слово
□+□+	то же	cinco	испанское слово
0012	троичная	ot	венгерское слово
и т.д.		и т.д.	

Это все коды понятия «пять». Первые два из них можно считать международными (но только нашей цивилизации!), следующие три – для вычислительных машин, остальные – национальные и т.д.

Шпионские коды отличаются от общечеловеческих лишь тем, что преследуют цель ограничить минимумом число лиц, способных понять информацию. Прежде чем что-либо сообщить, шпионы уславливаются о кодах (остальные – тоже: язык слов, жестов, мимики осваивается в детстве). Но всё это делается после первого контакта. На стадии же первого контакта и ВЦ, и мы должны отбросить мысль об использовании кодов.

нику для ленинградцев или частоте $f_{\text{Н}}$ для всех цивилизаций. Итак, этот факт укрепляет нас в мнении, что мы на правильном пути. Правда, есть и исключения: украинцы кукушку называют зозулей. На это можно было бы ответить избитым штампом, который так любят литературные критики: «Исключение лишь подтверждает правило». Но мы, движимые стойкой неприязнью к штампам, лучше доведём этот штамп до абсурда. Одно исключение – одно подтверждение, два исключения – два подтверждения и т.д. В пределе, если существуют только исключения, то правило оказывается бесконечно твёрдым!

Как же возникла эта бессмыслица: «Исключение лишь подтверждает правило»? По мнению автора, это результат искажения в пылу полемики верной мысли: «Исключение подтверждает, что это всего лишь приблизительное правило, а не строгий закон». В таком виде этот афоризм продуктивен и для нас (как предостережение): если некоторые народы, слыхавшие «ку-ку», прошли мимо слова «кукушка», то есть шанс, что некоторые ВЦ, знающие $f_{\text{Н}}$, всё-таки не воспользуются ею при установлении первого контакта с нами.

Что же у нас остаётся после отбрасывания модуляции (техники) и кодов (языков)? Остаётся лишь физика и математика – науки, обладающие наибольшими шансами на пересечения у двух цивилизаций.

Итак, мы делаем первый решительный шаг вперёд (или в сторону, но не назад!) от предположения (**1**). Заодно уж стóит ещё раз пересмотреть и то, что в (**1**) имеется от физики и математики.

Вспомним предыдущую задачу. Абсолютно точное и самое заметное место для свидания в Ленинграде – не рядом с Медным Всадником, а верхом на его бронзовом коне. Это привлекло бы к вам внимание с первого взгляда, и поиск был бы совершенно не нужен. Однако это место уже по праву занято Петром Первым, и это обстоятельство (плюс ваше хорошее воспитание или, на худой конец, милиция) будет вам сильно мешать.

Абсолютно точное и самое заметное место для встречи двух цивилизаций на оси частот:

$$f_{\text{H}} = 1\,420\,405\,751{,}7864\ldots\ \text{Гц}\,.$$

Выбор для связи этой частоты, равной (с доступной на сегодня точностью) частоте межзвёздного водорода, полностью освобождал бы от поиска, ВЦ была бы обнаружена «с первого взгляда». Однако это место на оси частот занято самим межзвёздным водородом, и это будет нам мешать. Более того, из-за различия в движении отдельных облаков водорода и из-за вызванного этим эффекта Доплера частота межзвёздного водорода размазана по оси частот на ± 200 кГц вокруг f_{H}. В результате эта область непригодна для контактов, поэтому Коккони и Моррисон предлагают осуществлять поиски не точно на частоте f_{H}, а в *окрестностях* порядка ± 1 МГц. Это лишает данную частоту преимущества высокой точности (пропадает зря около 9 знаков, отчего точность указания места ухудшается в миллиард раз). Это слабый пункт в идее f_{H}. Чтобы обойти эту трудность и сохранить точность указания места, М. Голей и С. Хорнер[1] в 1961 г. независимо друг от друга предложили искать сигналы не на f_{H}, а на точно удвоенной частоте $2f_{\text{H}}$ [сравните с (**1**)]:

«Частота $2f_{\text{H}}$ модулирована кодом…» **(1′)**

Эта идея, конечно, лучше (если она пришла в голову не только нам, но и ВЦ): на $2f_{\text{H}}$ нет помех от водорода, и в то же время через точную двойку совершается точная привязка к точному значению f_{H}.

Но, помимо уже рассмотренного недостатка – потребности в модуляции и кодах, – у неё есть и ещё одно коварное свойство: $2f_{\text{H}}$ – это не что иное, как вторая гармоника f_{H}. Природа умеет умножать частоту на два, на три и вообще на целое число (создавать высшие гармоники). Пример этому – колебания струны (см. задачу «Просим к роялю!»). Всякое искажение формы синусоидального колебания $A_1 \sin x$ есть создание в нём высших гармоник $A_2 \sin 2x$, $A_3 \sin 3x$, …. В радиоаппаратуре это делают специально для многих целей с помощью так называемых нелинейных элементов. Не исключено, что и в космосе возможны нелинейные процессы (вблизи горячих звёзд, в ионизированных облаках и т.д.). Поэтому есть шанс обнаружить естественную частоту $2f_{\text{H}}$ и принять её за искусственную. В результате даже искусственную частоту $2f_{\text{H}}$ здоровый скептицизм обязывает учёных сначала рассматривать как естественную, так как естественное всегда правдоподобнее (естественнее!) искусст-

[1] См. сборник «Межзвёздная связь», «Мир», 1965.

венного. Это несколько затрудняет принятие правильного решения в случае действительного контакта с ВЦ.

Казалось бы, что легко подправить идею так, чтобы она была неуязвимой: искать контакт на частоте $\frac{3}{2}f_{\text{Н}}$. Полуторную гармонику природа создать не может! Нет, это тоже можно поставить под сомнение: возможно, природа как-то разделила $f_{\text{Н}}$ на два (в радиоаппаратуре это делается легко), а затем умножила на три (третья гармоника от второй субгармоники!). Разумеется, такой сложный процесс $\left(\frac{3}{2}f_{\text{Н}}\right)$ менее вероятен, чем $2f_{\text{Н}}$, однако вероятность его не равна нулю.

Теперь у вас достаточно материалов для размышлений. И вы, как нам кажется, обязательно придёте к идее, к которой пришёл автор и которую он считает весьма перспективной.

В

Рассуждаем так: $f_{\text{Н}}$ – хорошо, $2f_{\text{Н}}$ – лучше, $\frac{3}{2}f_{\text{Н}}$ – ещё лучше. Следовательно, $\frac{7}{5}f_{\text{Н}}$ – ещё лучше, $\frac{211}{113}f_{\text{Н}}$ – ещё лучше? Стоп! Да, $\frac{211}{113}f_{\text{Н}}$ – достаточно неестественно, и природе трудно будет создать такой множитель: поскольку 211 и 113 – простые числа, не разлагающиеся на сомножители, то единственный путь получения этой частоты – генерация 211-й гармоники от 113-й субгармоники. Это природе вряд ли удастся! Но как ВЦ догадается применить именно этот множитель? Ведь простых дробей, составленных из простых чисел, – бесконечное множество и выбор между ними слишком неопределёнен. Очевидно, нужно искать такой множитель, который был бы достаточно знаменит для многих цивилизаций и в то же время был как можно более непохож на целое число. Лучше всего, если бы он вообще не мог быть разложен на целые числа в виде сомножителей и делителей.

Теперь ясно, что всё, что нам надо, – это иррациональное число. *Природа не умеет умножать частоту на иррациональное число!*

Какие же иррациональные числа из известных нам известны и другим цивилизациям? Наверняка известны

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \ldots,\ \sqrt{70\,000},\ \ldots \qquad \textbf{(2)}$$

Из этих чисел сразу же можно отбросить $\sqrt{70\,000}$, как число слишком большое ($\approx 264{,}6$), умножая на которое $f_{\text{Н}}$, мы уходим из оптимального радиодиапазона. Кроме того, $\sqrt{70\,000}$ мало отличается от своих соседей $\sqrt{70\,001}$ и $\sqrt{69\,999}$ и, следовательно, не выделяется, не знаменито. Рассматривая аналогично $\sqrt{69\,999}$, мы приходим к тем же выводам. Переходя последовательно к $\sqrt{69\,998}$, $\sqrt{69\,997}$, ..., $\sqrt{7}$, ..., мы обнаруживаем, что медленно, но верно, перечисленные выше недостатки слабеют. Минимум недостатков – у числа $\sqrt{2}$. Более того, оно так часто встречается во многих задачах алгебры, геометрии, тригонометрии, физики и других наук, что в ряду **(2)** оно, несомненно, является самым знаменитым как для нас, так и для ВЦ. Рассматривая аналогично корни более высоких степеней, мы обнаруживаем, что все они менее знамениты, чем $\sqrt{2}$.

А нет ли других иррациональных чисел, не менее знаменитых, чем $\sqrt{2}$? Есть! Например, число π. Оно не только иррационально, но к тому же ещё и трансцендентно, что придаёт ему особый аромат. Иррациональность! Трансцендентность!! Да это ведь терминология научно-фантастических романов о внеземных цивилизациях!

Число π является особо знаменитым числом. На нём держится геометрия, тригонометрия. На тригонометрии держатся ряды Фурье. На рядах Фурье держится физика (спектральный анализ), небесная механика и, что для нас важнее, теория сигналов, у которой число π присутствует на каждой странице. Впрочем, мы не знаем, какова теория сигналов у ВЦ. Но в одном можно быть твёрдо уверенным: если ВЦ знает математику (а только с такими ВЦ мы можем найти общий язык), то она знает и π. Можно назвать ещё несколько важных математических констант: e (основание натуральных логарифмов), $\ln 2$, однако они менее знамениты, чем π.[1]

Отметим, однако, что у числа π есть одна черта, внесённая человеком, т.е. оно несколько антропоцентрично. На Земле за определение π принято отношение длины окружности к её диаметру. Это случайность. Другая цивилизация могла бы принять отношение к радиусу. Тогда их «пи» было бы вдвое больше нашего. Значит, 2π тоже кандидат в сомножители, равноправный с π.

Итак, частотами, перспективными для первого контакта с ВЦ, являются

$$f_{\text{ВЦ}} = f_{\text{Н}}\sqrt{2}\,,\quad \pi f_{\text{Н}}\,,\quad 2\pi f_{\text{Н}}$$

и, кроме того

$$f_{\text{ВЦ}} = \frac{f_{\text{Н}}}{\sqrt{2}}\,,\quad \frac{f_{\text{Н}}}{\pi}\,,\quad \frac{f_{\text{Н}}}{2\pi}\,,$$

так как, возможно, вместо умножения ВЦ применит деление (которое, кстати сказать, по отношению к длине волны означает умножение).

Ну, а как быть со второй половиной проблемы – с критерием искусственности? Применять модуляцию и коды? Нет!! Ничего больше не нужно! Решена не половина проблемы, а вся целиком! Ведь природа не может умножить $f_{\text{Н}}$ на π, 2π или $\sqrt{2}$. Это может сделать только цивилизация. Следовательно, если мы обнаружим спектральную линию на частоте

$$f_1 = \pi f_{\text{Н}} = 4\,462\,336\,274{,}9288\ldots\ \text{Гц}\,,$$

то это будет явным произведением не природы, а искусства! Число π оказывается переданным на Землю без модуляции и кодов, с помощью только физики ($f_{\text{Н}}$) и математики (π и математическая операция умножения). Приняв f_1, мы убеждаемся, что установили контакт с цивилизацией. Тот, кто знает π, цивилизован! Более того, в нашем смысле только того и можно считать цивилизованным, кто знает число π. Число π – один из главных признаков нашей цивилизации и нам подобных. Это пароль разума, подобного нашему. Цивилизация, не знающая π, не имеет математики и радиотехники. Она не может сегодня вступить с нами в контакт, да с нею пока что нам, видимо, и не о чем говорить. Она развивалась настолько непохожим на нас пу-

[1] Например, константа e, возникшая в земной математике значительно позже π (как следствие теории пределов), могла бы у ВЦ не появиться вообще, если бы ВЦ изобрела вычислительную технику раньше математического анализа (как ни странно это выглядит с нашей, антропоцентричной, точки зрения). Тогда ВЦ не нуждалась бы в понятии бесконечно малого и могла бы обойтись дискретной математикой. Автор признателен Т.А.Розету за указание на такую экзотическую возможность.

тём, что на данном этапе мы не поймём друг друга. Мы можем сегодня установить контакт не со всеми внеземными цивилизациями, а только с π-цивилизациями.

Установление контакта может происходить следующим образом. Мы обнаруживаем некоторую частоту f_1 и делим на $f_Н$. Если

$$\frac{f_1}{f_Н} = \pi\,,$$

то задача решена. Однако вначале из-за помех и неточной настройки результат деления может быть далёким от π. Если он равен, допустим, 3,10, то, возможно, это не ВЦ, а третья гармоника $f_Н$, либо естественная частота формальдегида (см. таблицу предыдущей задачи).

Повышая точность измерения, мы будем улавливать всё новые знаки. Если в процессе уточнения

$$\frac{f_1}{f_Н} \to \pi\,,$$

то наша уверенность в контакте с ВЦ растёт: с каждым новым верным знаком результат в 10 раз ближе к достоверному. Пяти верных знаков достаточно, видимо, для оптимистов, десяти – для пессимистов.

Перечислим вкратце достоинства найденного нами метода.

1. Из сигнала устраняются модуляция и коды – самые ненадёжные компоненты. Собственно говоря, теперь это уже *не сигнал*, а *изделие*, изделие разума, созданное неизвестной нам техникой, неизвестными методами, но присланное нам, чтобы мы его анализировали на своих языках, с помощью своей техники, в своей системе счисления, делая выводы из того, насколько точно оно изготовлено.

2. Изделие оказывается чистой синусоидой, что дополнительно подчёркивает искусственность происхождения, так как все естественные сигналы космоса несинусоидальны. Чистота синусоиды позволяет пользоваться чрезвычайно узкополосным фильтром, что устраняет помехи и повышает радиус действия.

3. Сразу решаются обе половины проблемы первого контакта – и выбор частоты, и выбор критерия искусственности: частота и есть критерий.

4. Чисто синусоидальный сигнал не искажается в пути. Сигнал, состоящий из колебаний многих частот (а именно таков модулированный сигнал), искажается из-за того, что различные часто́ты распространяются с различной скоростью (см. сигналы пульсаров в задаче «Многосигнальная локация»).

Итак, у частоты $\pi f_Н$ много привлекательных особенностей. Весьма велики шансы, что ВЦ она тоже нравится. Но гарантии, что это так, нет. Вот если бы нам удалось переслать ВЦ эту книгу, тогда они наверняка поступили бы в соответствии с нашими рекомендациями.

114. Расписание связи с внеземными цивилизациями[1]

A

Какого числа придёт сигнал от цивилизации звезды Альтаир? От Тау Кита?

[1] Задача опубликована в 4-м издании («Наука», 1979) – *Прим. составителя документа.*

Б

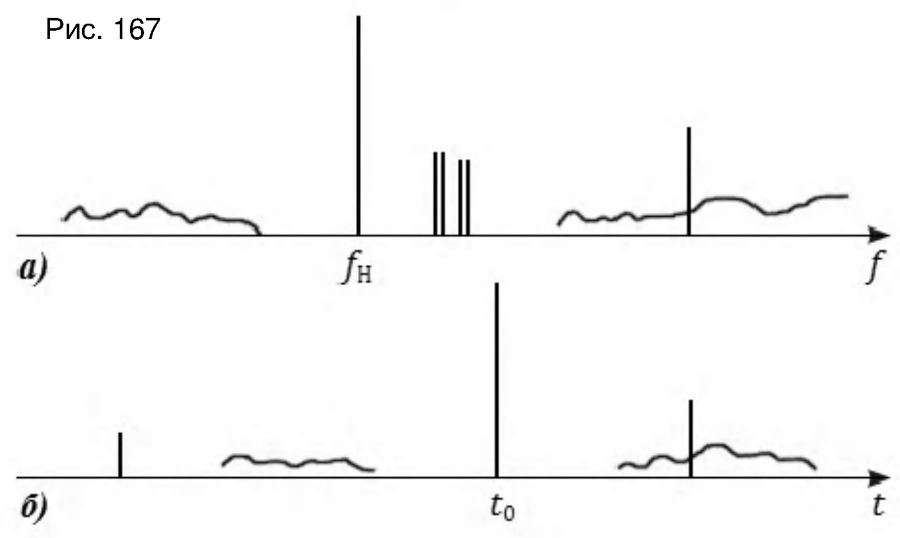
Вопрос кажется бредовым: разве нам дано это угадать? Как мы можем самостоятельно, без участия цивилизации звезды Альтаир, назначать для неё дату? Да и существуют ли они вообще, эти внеземные цивилизации?

Относительно последнего вопроса мы ещё раз напомним, что сказано в начале задачи «Свидание под часами». Мы будем исходить из предположения, что ВЦ существуют. Это входит в условия задачи. Более того, в условия задачи входит предположение, что они (или некоторые из них) хотят установить связь с другими ВЦ (и, следовательно, с нами), а также то, что они уверены, что и мы хотим контакта с ними. Они даже уверены, что мы уверены, что они уверены, что мы хотим контакта с ними. И они, так же как и мы, сделают всё возможное, чтобы облегчить задачу контакта. Именно те цивилизации, которые обладают перечисленными свойствами, мы имеем в виду.

Вопрос о существовании ВЦ – отдельная проблема, очень сложная в теоретическом плане и не разрешимая без экспериментальной проверки. С одной стороны, ни один закон природы не запрещает возникновения и существования цивилизации. Это строго доказывается достоверным фактом нашего с вами существования. С другой стороны, ни один закон природы не обязывает каждую планету идти в своём развитии именно к цивилизации. Это тоже подтверждено экспериментально: на Венере и Марсе цивилизации нет. Почти полное отсутствие знаний о планетах других звёзд и условий на них делает оценки числа цивилизаций в нашей Галактике весьма неопределёнными и слабо обоснованными. Острая нехватка экспериментальных данных делает настоятельным переход к поискам ВЦ. А для этого желательно как можно лучше выбрать не только волну, но и момент связи: ведь если сигналы ВЦ пришли вчера, а мы ищем их сегодня, то контакт не состоится.

Итак, может ли цивилизация Солнца, исходя из перечисленных выше предположений, самостоятельно назначить дату прихода сигналов от Тау Кита? Да, может, но не «самостоятельно», а лишь правильно «прочитав» указания «генерального конструктора», роль которого выполняет Галактика, общая для нас и Тау Кита, цивилизация которой тоже пытается прочесть эти указания, чтобы выбрать «самостоятельно» момент передачи сигналов. Может на том же основании и с такой же уверенностью, с какой мы выбрали волну связи ($f_Н$) или место свидания в Ленинграде (Медный Всадник, см. ещё раз внимательно задачу «Свидание под часами»). Подобно то-

Рис. 167



му как Вселенная подсказывает всем своим детям-цивилизациям одну и ту же волну связи, так она подсказывает всем и единое расписание. Вся задача в том, чтобы мы были послушными и умными детьми и одинаково понимали подсказку нашей Мамы.

На рис. рис. 167*а* показана ось частот f и на ней некоторые объекты Вселенной, достаточно знаменитые. Тонкая высокая палочка означает спектральную линию излучения нейтрального водорода (f_{H}). Это самый заметный объект в радиодиапазоне, его знают все цивилизации, и, как мы надеемся, они должны так или иначе (см. задачу «Свидание под часами» или «Пароль разума») привязать к нему частоту своей задачи.

Большинство спектральных линий тонки[1] (т.е. занимают крайне малый отрезок оси́ частот), часто́ты их точно известны. Это весьма ценные свойства для уточнения частоты́ связи.

Теперь посмотрите на рис. 167*б*. Если вы недостаточно внимательны, то вы не обнаружите в нём никаких существенных отличий от рис. 167*а*. Те же тонкие палочки, некоторые из них посильнее (по оси ординат – мощность излучения), другие послабее. Если привязываться, то к самой высокой, самой знаменитой t_0. Но если вы это сделали, то вы уже бессознательно овладели расписанием связи со всеми ВЦ. Потому что между рис. 167*а* и *б* всё-таки есть существеннейшее для практики различие: на оси абсцисс у ***а***) откладывается частота f, а у ***б***) – время t. И смысл палочек ***б***) совершенно другой: это не спектральные линии. А что это?

Палочки на рис. 167*б* тоже достаточно тонки, т.е. коротки во времени. Эти палочки – не объекты, как это было на рис. 167*а*, а события во Вселенной. Узкие палочки – кратковременные события. Вот теперь вы уже сознательно овладели идеей расписания.

В

...Время ... продолжает служить человечеству и всей Вселенной постоянно в одинаковой полноте и непрерывности.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 63

Если ВЦ найдут разумным (для облегчения поиска сигналов по частоте) привязать свои сигналы к самой знаменитой, известной всем, частоте f_{H}, они же должны найти разумным (для облегчения поиска сигналов во времени) привязать свои сигналы и к самому знаменитому, известному всем, событию.

Самое знаменитое из известных нам событий видимой нам части Вселенной, как считают многие, – это космологический взрыв, с которого началось известное состояние разлетающейся Вселенной. До него были события, возможно, ещё более эффектные, но мы пока о них не знаем ничего, так как взрыв замаскировал древнейшую историю Вселенной.

Этот взрыв был давно, 15-20 млрд. лет назад, т.е. его момент известен крайне неточно. Но даже не это главное. Мы не можем привязать активные действия непо-

[1] По определению спектральная линия бесконечно тонка (иначе она не линия, а полоса), но практики называют линией и полосу, если она достаточно узка, так же как студенты называют линией ту полосу, которую карандаш оставляет на бумаге или мел на доске.

средственно к событию, которое уже позади. Первоначальный взрыв хорош как стартовый сигнал для всех передатчиков, но в то время не было никаких передатчиков. Для создания передатчиков нужно сначала, чтобы родились их конструкторы, а для этого Вселенная должна была маленько поостыть.

Итак, воспользоваться можно только теми событиями, которые происходят на глазах радистов, управляющих передатчиками. Это – текущие события. Самые грандиозные текущие события в нашей Галактике – те, которые происходят в её ядре. Но они непрерывны, почти равномерны (как событие *А* на рис. 167*б*). У них нет чётко выраженного мгновения, которое было бы стартовым выстрелом для всех передатчиков Галактики.

Но есть и импульсные, кратковременные события, видимые всем. Это взрывы так называемых Новых и Сверхновых звёзд. С физикой того, что происходит в них при взрыве, вы можете познакомиться по книге И.С. Шкловского «Звёзды, их рождение, жизнь и смерть», М., «Наука», 1975. Здесь мы отметим только те детали, которые важны для нашей задачи.

Новая, взрываясь, приобретает на короткое время яркость, в тысячи или миллионы раз больше первоначальной. Момент максимума блеска Новой можно уловить с точностью до долей суток. Видна она сотням миллионов других звёзд. И всё это, конечно же, благоприятствует тому, чтобы все видящие её ВЦ, понимающие цену времени и расписанию, приняли этот момент за стартовый выстрел, за синхросигнал.

Рис. 168

Сверхновая, судя по названию, – это самая новая Новая. Но это не так: Сверхновая – это самая сильная Новая, что не совсем по-русски, но уже укоренилось в языке астрофизики. Короче, Сверхновая при взрыве в десятки тысяч раз ярче рядовой Новой. Сверхновая заметна практически всей Галактике, за исключением тех, кто находится по ту сторону очень пыльного галактического ядра. Она – самое знаменитое событие из импульсных в Галактике. Случаются Сверхновые в среднем один раз в сто лет, но последние 375 лет они с Земли в нашей Галактике не наблюдались. И это не означает, что вспышка Сверхновой назрела и вот-вот произойдёт.

29 августа 1975 г. Земля наблюдала вспышку Новой в созвездии Лебедя: вдруг «возникла» на небе новая звезда ярче второй звёздной величины.[1] Эта Новая взорвалась около 5000 лет назад, и, судя по этому расстоянию (свет к Земле шёл 5000 лет), она ярче рядовых Новых в сотни раз, хотя и в сотни раз слабее «рядовых» Сверхновых. Эту Новую «видели» около миллиарда звёзд (и, возможно, тысячи или миллионы цивилизаций). Её ещё предстоит увидеть в будущем многим тысячам (или миллионам?) цивилизаций.

[1] Первым в Европе вспышку Новой Лебедя заметил восьмиклассник из Полоцка Юра Селенок, а затем и многие другие («Комсомольская правда», 22 января 1977 г.).

Теперь всё, что требуется от разумных существ, это то, чтобы каждая ВЦ, желающая передавать, догадалась включить свой передатчик позывных в тот день, когда она увидела максимум вспышки Новой Лебедя. Расписание получается само собой. Его можно вычислить по известным координатам звёзд и по известной скорости распространения радиоволн. На рис. 168 показаны Новая, Земля и несколько звёзд, которые мы проверяем на наличие ВЦ.

Свет от Новой к Земле пришёл по прямой Новая–Земля, к цивилизации $ВЦ_1$ по прямой Новая–$ВЦ_1$, и если $ВЦ_1$ тут же включит передатчик, то радиосигнал примет «эстафету» у светового импульса Новой и придёт на Землю по прямой $ВЦ_1$–Земля в момент, который запаздывает на Земле относительно момента наблюдения вспышки $t_0 = 29.08.1975$ настолько (t), насколько ломаная Новая–$ВЦ_1$–Земля длиннее прямой Новая–Земля:

$$t = (R_1 + R) - R_0\,, \qquad \textbf{(1)}$$

где все расстояния R – в световых годах, время t – в годах. Дата прихода сигнала

$$t_0 + t = 29.08.1975 + R_1 + R - R_0\,. \qquad \textbf{(2)}$$

Неизвестное R_1 можно выразить через известные величины R, R_0 и μ – угол у Земли между направлениями на Новую и на $ВЦ_1$ (теорема косинусов):

$$R_1 = \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R\cos\mu}\,,$$

и тогда

$$t = \sqrt{R_0^2 + R^2 - 2R_0 R\cos\mu} + R - R_0\,.$$

Для очень близких звёзд, для которых $R \ll R_0$ (направления на Новую от Земли и от ВЦ почти параллельны), годна упрощённая формула

$$t \approx R(1 - \cos\mu)\,, \qquad \textbf{(3)}$$

т.е. точное знание R_0 не обязательно.

По этим формулам, удивительно элементарным, Земля может решить вопрос, казавшийся сложнейшим и даже неразрешимым: рассчитать дату прихода сигнала от цивилизации любой звезды.[1] И не только Земля: любая ВЦ может рассчитать аналогичное расписание для себя. Например, Альфа Центавра может ждать сигнала Земли 15.01.1980 (по земному календарю). Увы, на этот раз она их ещё не дождётся: мы должны были послать их в день, когда увидели вспышку Новой – 29.08.1975. Но мы не догадались сделать это, т.е. тогда мы были ещё недостаточно цивилизованы. (Впрочем, достаточно ли цивилизована сама Альфа Центавра, мы узнаем 30.12.1982.) Теперь уже, при вспышке новой Новой, мы будем знать, что делать, чтобы не показаться недоразвитыми перед другими цивилизациями.

Но хватит любоваться формулами, дадим им работу. Какого числа придёт сигнал, например, от цивилизации звезды Альтаир? Расстояние до неё $R = 16{,}5$ св. лет, угловое расстояние от Новой Лебедя $\mu = 40°39'$. Оно вычислено по формуле сферической тригонометрии:

$$\cos\mu = \cos(\alpha_Н - \alpha_{ВЦ})\cos\delta_Н\cos\delta_{ВЦ} + \sin\delta_Н\sin\delta_{ВЦ}\,,$$

[1] См. работы автора: Труды ЛИАП, 1976, т. 98; «Смотри в корень!», изд. 3, 1976; «Астрономический журнал», 1977, № 2.

где $\alpha_{\text{Н}}$ и $\delta_{\text{Н}}$ – угловые координаты Новой, $\alpha_{\text{ВЦ}}$ и $\delta_{\text{ВЦ}}$ – то же для звезды, испытываемой на наличие ВЦ, т.е. в данном случае Альтаира. Запаздывание сигнала

$$t = R(1 - \cos\mu) = 16{,}5(1 - 0{,}7587) = 3{,}98 \text{ года} = 4 \text{ года} - 7 \text{ суток}.$$

Дата прихода сигнала (если у Альтаира есть ВЦ)

$$t_0 + t = 29.08.1975 + 4 \text{ года} - 7 \text{ суток} = 22.08.1979.$$

В табл. 1 приводится расписание для некоторых звёзд – тех, которые мы уже проморгали, и тех, с которыми предстоит работа. Это далеко не всё. Ежегодно, начиная с 29.08.1975, в расписание попадает 10^5 звёзд. А поскольку большинство учёных сходятся к мнению, что одна ВЦ приходится в среднем на $3 \cdot 10^5$ звёзд, то мы по этому расписанию можем устанавливать каждые три года по одному контакту в среднем. К сожалению, точность сегодняшней астрометрии слишком мала и не позволяет использовать расписание в полном объёме. В самом деле, взгляните в конец расписания! Сигнал с Проциона придёт 25.02.1993, но дата предсказана с погрешностью ± 100 суток. Откуда эти сто суток? Что это за расписание, которое даёт такие ошибки?

Таблица 1

Звезда	R, св. годы	μ	Дата	$\pm\Delta t$, сут
9723	80	1°15′	05.09.1975	2
61 Лебедя	11,1	9°38′	25.10.1975	0,5
Grb 34	11,55	12°02′	01.12.1975	1,5
Kruger 60	19,9	14°12′	23.01.1976	2
…	…	…	…	…
Ross 755	21,8	30°48′	23.08.1978	40
9668	72,5	16°27′	25.07.1978	160
Зв. Барнарда	5,98	59°54′	27.07.1978	12
Вега	27	29°24′	15.02.1979	50
713	25,1	31°00′	5.06.1979	50
Альтаир	16,5	40°39′	22.07.1979	40
…	…	…	…	…
Альфа Центавра	4,39	134°17′	30.12.1982	30
Тау Кита	11,8	88°01′	15.01.1987	90
Эпсилон Эридана	10,8	100°35′	15.06.1988	60
Процион	11,33	122°45′	25.02.1993	100

Ответственно заявляем: идея расписания тут не виновата. Потенциальная точность расписания ± 3 часа! С такой точностью можно было выловить момент максимума вспышки Новой Лебедя. Все остальные погрешности – от незнания точных расстояний до звёзд. Например, расстояние R до звезды 9668 равно 72,5 св. года, но с погрешностью ± 11 св. лет! Знаменитая астрономическая точность, вошедшая в поговорку, недостаточна для новых задач, выдвигаемых расписанием связи с ВЦ.

День прихода сигнала на Землю сегодня можно предсказать с точностью до суток только для десятка звёзд, до недели – около сотни, до трёх месяцев – порядка тысяч. Когда же земная астрономия полностью созреет для обслуживания этого расписания (увеличит точность измерения расстояний на 2-3 порядка, на что понадо-

бится 50-100 лет развития), то в расписание с точностью до недели будут попадать миллионы звёзд, а для тысяч точность предсказания будет ± 3 часа! Послезавтра на рассвете в Пулково придёт сигнал от звезды Унук-Эль-хайя! – вот на какие предсказания способна идея расписания, если она опирается на хорошую астрометрию. И у более развитых цивилизаций, скорее всего, такая точность давно уже в ходу. Хорошая астрометрия – это естественный порог, который каждая цивилизация должна преодолеть, если хочет вступить в Клуб Цивилизаций. Земля уже близка к этому порогу, но ещё не преодолела его.

Дорогой читатель! Скорее кончай школу и астрономический факультет! Приступай к делу! Положи все силы на повышение точности астрометрии! Этим самым ты введёшь нашу цивилизацию в Великое Кольцо. За это стоит отдать жизнь!

Между прочим, дорогой читатель, после того как ты установишь первый контакт, перед тобой откроются сказочные возможности по уточнению всех расстояний в Галактике. Прежде всего, сверь истинную дату прихода сигнала с той, которую ты предсказал. Поскольку ошибка предсказания – это астрометрическая ошибка, то по разности между истинной и предсказанной датами ты можешь уже уточнить расстояние до этой звезды. Далее, попроси цивилизацию-партнёра установить у себя ответчик-ретранслятор, который ретранслировал бы к тебе обратно твой собственный сигнал, – и по его запаздыванию ты измеришь расстояние Земля–ВЦ с точностью до долей световой секунды. Установи у себя такой же ответчик – и ВЦ тоже сможет провести эти измерения для себя. Попроси ВЦ передать на Землю свою карту звёздного неба (и передай им свою). Это будет революцией для всей астрометрии. Сейчас наиболее точный из всех способов измерения межзвёздных расстояний состоит в том, что Земля фотографирует участок неба в январе, например, и затем повторно, в июле, когда фотоаппарат, описав вместе с Землёй половину орбиты вокруг Солнца, займёт новое положение относительно объекта съёмки. Зная диаметр орбиты Земли (около $300 \cdot 10^6$ км или $16{,}5$ св. мин.), мы по смещению июльского изображения звезды относительно январского (параллакс) определяем расстояние до звезды.

Но если уже установлен контакт, например, с цивилизацией звезды Тау Кита (расстояние $11{,}8$ св. лет), и мы получили от неё карту неба и можем сверить с нашей, то получим точность расстояний почти до всех звёзд в $400\,000$ раз бóльшую (во столько раз $11{,}8$ св. лет больше $16{,}5$ св. мин.). Такое достижение невозможно в отдельности ни для Тау Кита, ни для Земли, но становится достоянием обеих цивилизаций, как только они объединятся в систему. Сила – в единении!

Однако до первого контакта мы вынуждены обходиться точностью своей, земной астрометрии. К счастью, сама идея расписания отчасти выручает земную астрометрию. Она обладает удивительным свойством иногда давать хорошую точность при плохой астрометрии: если угол μ мал, то ломаная Новая–ВЦ–Земля (см. звезду 9723 на рис. 168) мало отличается от прямой, и поэтому все сроки сокращаются: $t \ll R$ и $\Delta t \ll \Delta R$.

При расчёте даты все расстояния и их погрешности умножаются на множитель $1 - \cos\mu$, который может быть весьма малым. Например, для звезды 9723 $\mu = 1°15'$, и поэтому $1 - \cos\mu = 1 - 0{,}999762 = 0{,}000238 \approx 1/4000$, т.е. погрешность даты оказывается меньше погрешности расстояния в 4000 раз; при расстоянии $R = 80 \pm 20$ св. лет запаздывание сигнала относительно 29.08.1975 всего лишь 7 ± 2 суток.

Рассмотрим эллипсы рис. 168. Эллипс – геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фокусов – величина постоянная. Эта сумма расстояний в нашем случае является длиной ломаной Новая–ВЦ–Земля. Её постоянство для всех точек эллипса (в пространстве – эллипсоида) означает, что от цивилизаций звёзд 1, 2, 3, 4, 5, 6, находящихся на одном и том же эллипсе, сигналы на Землю поступят одновременно. С эллипса (эллипсоида) $Э_1$ сигналы придут тоже одновременно, причём раньше, чем с $Э_2$. Раньше же всех поступит на Землю сигнал от $ВЦ_0$, находящейся на отрезке прямой Новая–Земля. Он уже поступил 29.08.1975, одновременно и попутно с максимумом вспышки Новой (но не был принят по незнанию).

Со временем эллипсоид, с поверхности которого приходят сигналы, расширяется. Легко показать, что в течение первых 20-30 лет после наблюдения вспышки в него попадает ежегодно 100 000 звёзд, т.е. ежедневно – 280. В первые дни – это, в основном, те звёзды, которые находятся в самой непосредственной близости от отрезка прямой Новая–Земля. Направив сразу же после вспышки радиотелескоп на Новую, мы за одну неделю обследуем по расписанию 2000 звёзд, за год – почти 100 000. Эти звёзды обследуются не по одиночке, а гуртом, по 200-300 одновременно, что сильно увеличивает вероятность удачи. Это – коллективное расписание. Индивидуальным же расписанием такой точности (табл. 1) сегодня обладают лишь несколько сот звёзд в малой окрестности Земли (не далее 100 св. лет). Для более далёких звёзд, находящихся в стороне от Новой Лебедя, земная астрометрия не обеспечивает приемлемой точности расстояний. Однако, несмотря на это, далёкие звёзды могут дать точнейшее расписание, если вдруг в их направлении вспыхнет очередная Новая ($Н_2$ на рис. 168).

Где же искать сигналы сегодня, спустя три года после вспышки? Во-первых, по индивидуальному расписанию (табл. 1), а во-вторых, в окрестности Новой. Только имейте в виду, что за три года самая урожайная область уже несколько отступила от Новой. Найдём её.

Рис. 169

Поверхность эллипсоида $Э_1$ построена так, что она и есть геометрическое место точек, из которых сигналы должны поступать три года спустя, т.е. именно сегодня. Его большая ось $2a \approx 5000$ св. лет (за 3 года удлинилась на 3 св. года), малая ось $2b = 173$ св. года. Для удобства дальнейших построений этот же эллипсоид на **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показан в искажённом масштабе: a уменьшено, b увеличено. На поверхности внешнего эллипсоида находятся звёзды, от ВЦ которых сигналы начали поступать на Землю сегодня; на поверхности внутреннего – те, от которых сигналы начали поступать на τ лет раньше, а сегодня поступление на Землю прекращается (τ – средняя продолжительность излучения позывных).

Картина напоминает «дыню» в разрезе. Её «корка» (пространство между внешним и внутренним элипсоидами) – пространство, в котором содержатся звёзды, от цивилизаций которых должны поступать сегодня сигналы на Землю (сигналы уже начались и ещё не кончились). Толщина «корки» определяется τ (но не равна ему).

Пусть

$$\tau = 10\ \text{суток} = \frac{1}{36{,}5}\ \text{года}\,.$$

Объём внутреннего эллипсоида с малой полуосью b («нетто»)

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi a b^2\,,$$

а внешнего, с малой полуосью $b + \Delta b$ («брутто»)

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a (b + \Delta b)^2\,.$$

Объём «корки дыни» («тара»)

$$V = V_2 - V_1 \approx \frac{8}{3}\pi a b \Delta b\,,$$

или после некоторых преобразований

$$V = \frac{4}{3}\pi a b \tau \sqrt{\frac{a}{t}}\,,$$

где $t \approx 3$ года – время с момента наблюдений Новой. Этот объём равен 720 000 куб. св. лет. Нас интересует та его половина, которая ближе к Новой (её звёзды с точки зрения Земли расположены на небе очень тесно и поэтому удобны для одновременного обследования). Средняя плотность звёзд в этой области Галактики такова, что одна звезда приходится на 280 куб. св. лет. Таким образом, эта половина «корки» содержит 1300 звёзд.

Самое интересное, что эти 1300 звёзд сосредоточены на небе в очень маленькой площадке: вся дальняя половина «корки» с точки зрения Земли отстоит от Новой Лебедя на угол, который сегодня не больше

$$\operatorname{arctg}\frac{b}{c} = \operatorname{arctg}\frac{86{,}5}{2500} = 1°59'\,,$$

в то время как вторая половина «дынной корки» (ещё 1300 звёзд) для земного наблюдателя размазана по всему небу (на **Ошибка! Источник ссылки не найден.** угол μ_t сильно преувеличен). Поскольку вся небесная сфера содержит ~41 253 кв. град., а площадь кружка́ радиусом 1°59′ равна 10,75 кв. град., то поиск позывных в этом кружке́ сегодня в 4000 раз перспективнее, чем в таком же кружке, выбранном на небе случайным образом[1], и в 1300 раз перспективнее, чем проверка по расписанию одной какой-либо звезды.

Внутри этого кружка шансы на удачу распределены неравномерно. На **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показаны два одинаковых угла $\Delta\mu$, которым соответствуют равные конусы с вершинами у Земли. Внутрь этих равных телесных углов попадают неравные куски «дынной корки» (зачернены на **Ошибка! Источник**

[1] В таком же кружке́, но выбранном в направлении, диаметрально противоположном направлению на Новую, шансы ещё хуже. Расстояние до внешнего эллипсоида всего лишь $\frac{t}{2} = 1{,}5$ св. лет, а до внутреннего $\frac{t-\tau}{2}$ св. лет, т.е. толщина «корки» равна $\frac{\tau}{2} = \frac{1}{73}$ св. года. Объём куска «корки», находящегося в кружке́ площадью 10,75 кв. град, равен лишь $\frac{\pi r^2}{73} = \frac{\pi(1{,}5\sin 1°59')^2}{73} = 0{,}00335$ куб. св. года, что меньше объёма куска «корки», находящегося в таком же телесном угле вблизи Новой, в $10^8 \cdot 10^6$ раз. Во столько же раз различаются и шансы на контакт по «коллективному» расписанию в этих двух телесных углах.

ссылки не найден.). Рассматривая эти куски как усечённые конусы (несмотря на то, что они усечены не плоскостями, а эллипсоидами), мы замечаем, что их объёмы пропорциональны длине образующей l (которая зависит от угла, как это видно из штриховки корки на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**) и площади основания (которая прямо пропорциональна квадрату расстояния от Земли). Первое благоприятствует конусу 1, второе – конусу 2, но первое решительно преобладает (на **Ошибка! Источник ссылки не найден.** это не очень видно, потому что здесь μ_t сильно преувеличено). С учётом того и другого оказывается, что плотность интересующих нас звёзд на расстоянии $1°59'$ от Новой сегодня максимальна и в 354 раза больше, чем в направлении на Новую.

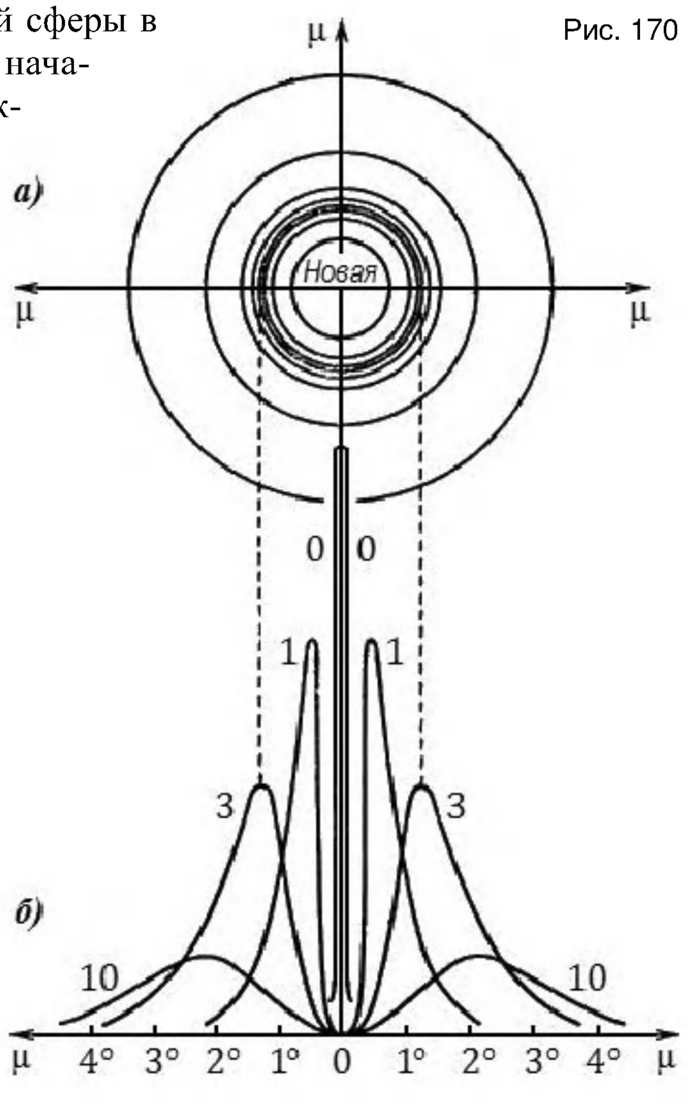


Рис. 170

На рис. 170a показана часть небесной сферы в окрестностях Новой Лебедя, принятой за начало координат. Густота концентрических окружностей иллюстрирует плотность вероятности приёма позывных от соответствующих точек неба. Наиболее перспективно кольцо вокруг Новой с внутренним радиусом около 1° и шириной около 3°. Здесь содержится большинство звёзд, от которых сигналы приходят (если приходят вообще) сегодня. Здесь и надо искать.

Рис. 170$б$ показывает распределение шансов удачи по сечению рис. 170a в любой плоскости, проходящей через Новую и Землю. Разные кривые – для разных моментов. Центральный пик 0, уходящий за пределы чертежа, соответствует первой декаде после вспышки. Двугорбая кривая 1 – год спустя, кривая 3 (сегодняшняя, август 1978) соответствует рис. 170a, кривая 10 – 10 лет спустя (август 1985).

В заключение отметим, что рассмотренная идея расписания держится на рискованном, строго говоря, предположении, что и другие цивилизации (или хотя бы некоторый их процент) придут к аналогичным решениям, т.е. к идее синхронизации и притом именно Новыми и Сверхновыми. Без этого предположения идея ничего не стоит. Любые расписания имеют цену только при условии, что они соблюдаются обеими сторонами: если, например, вы будете строго соблюдать расписание Аэрофлота, а сам Аэрофлот им пренебрежёт, то ваш полёт не состоится. К счастью, в соблюдении любого расписания заинтересованы обе стороны.

В декабре 1977 г. в журнале «Икарус» Мак-Лаглин тоже опубликовал расписание, привязанное к Новой Лебедя 1975 г. Это – ценнейший психологический аргумент в пользу того, что до этой идеи могут додуматься независимо не только русский и американец, но и другие цивилизации.

Итак, есть расписание. Оно может сработать через тысячу лет, а возможно, и сегодня вечером. Установим контакт с внеземной цивилизацией в текущем квартале!

115. Ищи под фонарём!

А

Существует анекдот о некоем рассеянном, который потерял ключ на улице и ищет его не там, где потерял, а под фонарями, где светло. Как вы оцениваете эту стратегию поиска?

Б

Поведение этого искателя не лишено разумности. Вероятность отыскать ключ в данном месте ночью $P(К)$ есть произведение вероятности $P(П)$ того, что ты его в этом месте потерял, на вероятность $P(К/П)$ того, что ты можешь его на этом месте увидеть при условии, что ключ действительно там:

$$P(К) = P(П)P(К/П)\,. \qquad (1)$$

Успех будет лишь при условии, что оба сомножителя правой части отличны от нуля. Но второй сомножитель зависит от освещённости; если светло, то $P(К/П) > 0$, темно – $P(К/П) = 0$. Поэтому искать там, где темно, бесполезно, даже если ключ лежит именно там. Нужно обыскать только освещённые места. Конечно, вероятность найти при этом не будет равна единице, но она не увеличится от поиска в тёмных местах[1]. Там лучше поискать завтра днём.

Разумеется, задача изложена упрощённо, не учтены вероятности обнаружения ключа другими органами чувств (на ощупь, по запаху и т.д.). От этого задача почти не пострадала количественно, но выиграла в простоте.

Ну а теперь, в соответствии с авторской традицией, полагается идею поиска под фонарём перенести на задачу поиска внеземных цивилизаций. Для автора это idée fixe, как говорят французы.[2]

[1] Вспомните задачу «Куда надо и когда надо», в которой мы искали «уголок» ВЦ не там, где он может находиться вообще, т.е. не по всей эклиптике, а только в точке противостояния с Солнцем, т.е. там, где он только и может превратиться в «фонарь» для нас.

[2] Проблема контакта с внеземными цивилизациями особенно занимала автора (см.: *Маковецкий П.В.* О структуре позывных внеземных цивилизаций. – Астрономический журнал, 1976, т. 53, вып. 1). Он высказывал соображения, что для связи с ВЦ мог бы использоваться сигнал на частоте πf_{H}, так как число π – «один из главных признаков нашей цивилизации и нам подобных». Эта догадка и послужила основным мотивом рисунка (предложенного самим автором), выполненного на обложке этой книги. (*Прим. ред.*)

В

Но вот уж меркнет солнца луч,
Выходит месяц из-за туч
И освещает на пути
Все звёзды Млечного пути.

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Выдержки из моего дневника в деревне»

Есть в Галактике фонари? Сто миллиардов. Каждая звезда – фонарь. Если мы посетим окрестности каждой звезды, то мы найдём то, что ищем. Более того, поскольку жизнь невозможна там, где нет света, то вдали от фонарей не только невозможно искать, но и нечего найти [оба сомножителя формулы **(1)** равны нулю].

Но это примитивный, прямо в лоб, перенос идеи поиска под фонарём. Он сегодня неосуществим: мы не можем пока облететь все звёзды. Мы должны решать задачу, оставаясь на Земле, т.е. поиск нужно вести радиотелескопами.

Обыскать с Земли все «фонари» Галактики – крайне трудная задача из-за огромности числа фонарей. На первой стадии надо обследовать только наиболее перспективные места, наиболее «яркие» фонари.

А теперь главное. Мы ищем не ключ, не запонку и не пятак. Мы ищем внеземную цивилизацию. Мы ищем *разум*. Поэтому мы обязаны воспользоваться главным свойством искомого объекта – его разумностью. Нужно искать фонари, сияющие светом разума. Если ВЦ передаёт, то она хочет, чтобы её сигналы были приняты. Тогда её главное свойство – разумность – означает, что она сделает всё, чтобы увеличить вероятность приёма.

Чем ярче фонарь, тем он привлекательнее и тем полезнее для задачи. Если ВЦ хочет, чтобы её обнаружили, то ей следовало бы перебраться под самый яркий фонарь. Это сложно. Но она может воспользоваться фонарём, оставаясь на месте. Через две точки можно провести прямую единственным образом. Это знает любой разум, постигший уже евклидову геометрию. Из всех прямых, проходящих через фонарь, прямая фонарь–ВЦ является особенной для задачи поиска ВЦ: на ней находится ВЦ. Этим она знаменита для самой ВЦ, а фонарём эта прямая знаменита для всех других ВЦ, находящихся на той же прямой где-либо в другом месте. А всё знаменитое для многих ВЦ может быть использовано в задаче поиска ВЦ. Направления на все знаменитые фонари – это наиболее знаменитые направления для поиска. Подобно тому, как мы нашли разумным привязываться к частоте $f_{\text{Н}}$ (в надежде, что и ВЦ найдут это разумным), есть смысл привязываться и к знаменитым «фонарям» (в надежде, что и ВЦ видят в этом смысл). Частота $f_{\text{Н}}$ – фонарь на оси́ частот; звезда-сверхгигант – фонарь на оси направлений.

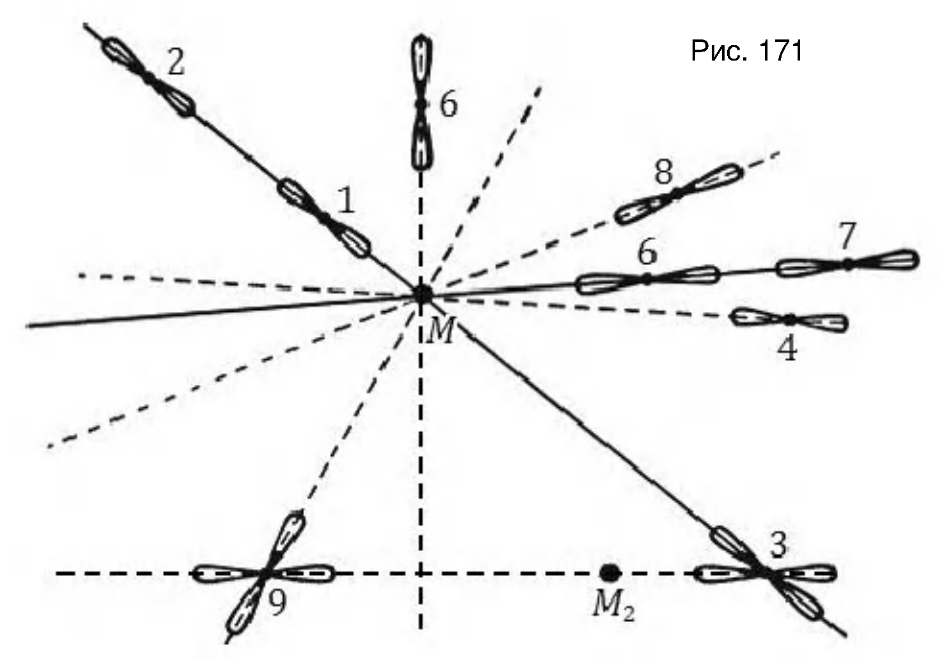


Рис. 171

Но что значит привязываться в данном случае? На рис. 171 показан знаменитый «фонарь» M, известный всем в Галактике (для научной строгости слово «фонарь» мы заменим словом «маяк»). Каждая ВЦ должна излучать и принимать вдоль прямой ВЦ – маяк (в обоих направлениях). Это обстоятельство отражено на рис. 171 острыми диаграммами антенн, смотрящих в обе стороны по прямой. Если это так, то ВЦ_1, ВЦ_2 и ВЦ_3 вступят в контакт друг с другом благодаря маяку M. Он же поможет вступить в связь ВЦ_6 с ВЦ_7 (но не ВЦ_6 с ВЦ_2). Для ВЦ_4, ВЦ_5, ВЦ_8 и ВЦ_9 маяк M ничего не даёт. Не судьба!

А теперь представьте, что на рис. 171 маяк M отсутствует. Сразу же исчезает организующая идея, все ВЦ теперь вынуждены искать по всему небу (все и так обязаны искать по всему небу, но в первую очередь – у маяков, где шансы найти выше).

Проследим путь, которым разум каждой цивилизации додумывается до идеи маяков.

Одним из самых интересных объектов Галактики сегодня является Крабовидная туманность в Тельце, для краткости называемая Крабом, – остаток вспышки Сверхновой, которую Земля наблюдала в 1054 г. Интерес к ней подогревается тем, что, помимо туманности, в остатке этой Сверхновой имеется пульсар, одновременно световой, рентгеновский, гамма и радио. Поэтому Земля смотрит на Краб (глазами и мысленным взором теоретиков) в общем гораздо чаще, чем в другом, случайном направлении.

Допустим, что на продолжении луча Земля–Краб имеется ВЦ. И Земля и ВЦ неоднократно наводят свои телескопы на Краб в научных целях и *при этом один телескоп содержится в поле зрения другого*.

Осознав это, ВЦ посылает позывные в сторону Краба, и Земля принимает их неожиданно для себя. Контакт осуществился случайно, в силу попутности позывных с излучением Краба, исследуемым на Земле. Но вероятность этого случайного контакта $P_{\text{Кр}}$ существенно выше вероятности P_0 случайного контакта в другом, не отмеченном Крабом, направлении. Если для Земли общее время научных наблюдений Краба $T_{\text{З Кр}}$ в $N_{\text{Кр}}$ раз больше, чем общее время научных наблюдений в произвольном направлении $T_{\text{З 0}}$, и то же верно для ВЦ ($T_{\text{ВЦ Кр}} = N_{\text{Кр}} T_{\text{ВЦ 0}}$), то

$$\frac{P_{\text{Кр}}}{P_0} = \frac{T_{\text{З Кр}}}{T_{\text{З 0}}} \cdot \frac{T_{\text{ВЦ Кр}}}{T_{\text{ВЦ 0}}} = N_{\text{Кр}}^2 .$$

Величина $N_{\text{Кр}}$ порядка 1000, а значит $N_{\text{Кр}}^2 = 1\,000\,000$, т.е. огромна. Во столько раз вероятность того, что два телескопа смотрят друг другу в глаза, глядя на Краб, больше, чем в случайном направлении. Осознание этого факта – главный шаг в приближении образов мышления Земли и ВЦ к сознательному использованию Краба как маяка для контактов. Мышление совершило прорыв, дальнейшие рассуждения – уже дело техники, как говорят шахматисты.

Легко осознать, что если обе цивилизации находятся по одну сторону от Краба, то одна из них должна посылать сигналы в направлении, противоположном Крабу. Не зная расположения заранее, обе цивилизации будут излучать в обе стороны.

Подчеркнём: эффективность метода маяка – следствие не того, что на *случайной* прямой Земля – маяк цивилизаций почему-либо больше, чем на другой, а того, что эти цивилизации, если они есть, *закономерно* чаще посылают свои сигналы в сторону маяка (и, следовательно, попутно в сторону Земли).

Но один маяк мало что даёт: на рис. 171 он для ВЦ_5, например, не дал ничего. Строго говоря, прямая линия не даст ничего и ВЦ_1, так как вероятность попадания двух цивилизаций на одну прямую с маяком равна нулю (через три случайных точки пространства провести прямую практически никогда не удаётся). Однако поскольку диаграмма антенны не бесконечно острая, то вместо одной прямой имеется целый конус направлений, и теперь вероятность контакта нулю не равна. Кроме того, можно выбрать не один маяк, а сотню, что повысит шансы в 100 раз. Например, ВЦ_3 могла бы легко установить контакт с ВЦ_9, если бы существовал маяк M_2.

На роль маяков годятся самые знаменитые, самые яркие объекты. Выберем их.

Самый яркий небесный объект – Солнце, затем Луна, Венера, Юпитер, Сириус. Но Солнце уже с расстояния в 10 световых лет кажется маленькой звёздочкой, ничем не знаменитой. Луна, Венера, Юпитер – тем более: их просто не видать. Очевидно, выбирать нужно знаменитость не провинциального масштаба, а всемирную, например, всегалактическую.

Такими знаменитостями могут быть звёзды-сверхгиганты, пульсары, шаровые звёздные скопления, ядро Галактики, компактные радио- и рентгеновские источники. Звёзды-сверхгиганты видны многим. До звезды Денеб 800 св. лет, а она видна как одна из наиболее ярких звёзд земного неба. Значит, она хороший маяк для расстояний порядка 1600 св. лет (по 800 св. лет в обе стороны от маяка). Бетельгейзе (Альфа Ориона) пригодна для маяка на расстоянии до 2000 св. лет. Пригодны также Антарес (Альфа Скорпиона), Шат (Бета Пегаса) и др. Типичное шаровое скопление содержит 100 000 звёзд, и эта плотная куча, конечно же, хороший маяк. Маяками могут служить и соседние галактики, например «туманность» Андромеды. Она видна всем цивилизациям нашей Галактики одинаково, потому что расстояние внутри Галактики – мелочь по сравнению с межгалактическими. Разумеется, мы пока не собираемся связываться с андромедянами. Мы просто используем направление на туманность Андромеды, как известное всем «нашим», для связи с теми, кто находится внутри нашей Галактики на этом направлении и рассуждает аналогично нам, т.е. считает эту туманность фонарём, в направлении на который смотрят те, кто хочет быть найденным.

* * *

Итак, в задачах «Свидание под часами», «Пароль разума», «Расписание связи с внеземными цивилизациями», «Ищи под фонарём!» мы рассмотрели методы поиска внеземных цивилизаций с помощью радиосвязи. Все они опираются на единство Вселенной, на общую для всех объективную реальность и её законы, на познаваемость этих законов, на обоюдное желание контакта и сближение образов мышления всех цивилизаций при выборе волн связи, на данные астрофизики и астрометрии.

Мы, связисты, рассматриваем Галактику как гигантскую подсказку всем – и передающим, и принимающим. Вселенная, материя и законы её движения могут выполнить роль «генерального конструктора», указывающего обеим сторонам, каким путём согласовать передатчик и приёмник. Мы надеемся, что нам удалось правильно прочитать указания этого генерального конструктора и по волне связи, и по направлению, и по расписанию.

116. Никто не обнимет необъятного

А

Есть ли на свете человек, который мог бы обнять необъятное?
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 91*а*

На столе лежит знаменитое ньютоновское яблоко, участвовавшее в открытии закона всемирного тяготения (если оно почему-либо внушает робость, то пусть будет обычное, с базара).

Что нужно было бы принять во внимание, чтобы вычислить *абсолютно точно* ту силу, с которой яблоко в данный момент давит на стол?

Б

Опять скажу: никто не обнимет необъятного!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 160

То решение, которым обычно удовлетворяются, предельно просто: сила Q, с которой яблоко давит на стол, равна весу (по абсолютной величине силе тяжести) яблока:

$$Q = P\,,$$

т.е. если при покупке яблоко весило 0,2 кгс, то и $Q = 0{,}2$ кгс (разумеется, при предположении, что взвешивание не содержало грубых ошибок). Однако для нашей задачи этого мало. Вам надо перечислить *все* причины, которые влияют на силу давления яблока в данное мгновение на стол.

Чтобы легче было обнаружить все причины, расшифруем формулу так:

$$Q = P = mg\,,$$

где m – масса яблока, g – ускорение свободного падения.

Проанализируем отдельно каждый из элементов формулы. Их четыре:

1. По каким причинам могла измениться масса яблока m?

2. Ускорение g?

3. Является ли равенство $P = mg$ абсолютно точным? Или в него следует ввести дополнительные слагаемые либо сомножители?

4. Верно ли равенство $Q = P$?

В

Плюнь тому в глаза, кто скажет, что можно обнять необъятное!

КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 104

1. Масса яблока меняется во времени: испарение воды под действием тепла и солнечных лучей (либо отсыревание от атмосферной влаги); выделение и поглощение газов из-за продолжающихся химических реакций, сопровождающих созревание, фотосинтез, гниение; вылет электронов под действием световых, рентгеновских и гамма-лучей; поглощение бомбардирующих яблоко протонов, нейтронов, электронов, световых и других квантов; излучение собственных радиоволн и поглощение радиоволн, излучаемых вами, и т.д. – всё это влияет на массу яблока.

2. Ускорение свободного падения меняется и в пространстве, и во времени. В пространстве – зависит от географической широты (потому что Земля – не шар, а геоид), от высоты над уровнем моря (обратно пропорционально квадрату расстояния от центра Земли). Поскольку маловероятно, чтобы при переносе яблока с базара на стол ничуть не изменилась ни его широта, ни высота над уровнем моря, то по этим причинам ускорение свободного падения стало иным[1]. Яблоко несимметрично, поэтому, перевернув его на другой бок, вы изменили бы высоту его центра масс и, следовательно, ускорение свободного падения. Земной шар неоднороден, по отношению к столу массы внутри шара расположены иначе, чем по отношению к базару, изменилось положение яблока и по отношению к другим массам – домам, деревьям и т.д.

Всё это надо учитывать при абсолютно точном решении вопроса.

Во времени ускорение свободного падения меняется из-за непрерывного перемещения масс внутри земного шара, роста одних гор и понижения других; из-за перемещения морских волн, облаков, бульдозеров, пешеходов и бактерий; из-за непрерывного возрастания массы Земли благодаря выпадению метеорной пыли и уменьшения массы благодаря отлёту экспедиции на Венеру.

3. Если весом (силой тяжести) условились считать произведение массы на ускорение свободного падения на Земле и именно на нашем столе, то равенство

$$P = mg$$

является точным. Тогда неверно равенство $Q = P$, так как, кроме Земли, на яблоко действуют Луна, Солнце, планеты, звёзды, а кроме гравитации – центробежные силы инерции, вызванные вращением Земли, и др.

Однако вес P на базаре, с которого принесено яблоко, определяют без учёта этих сил, динамометром – безменом, например. Тогда неверно соотношение $P = mg$, в правой части должны появиться дополнительные слагаемые, причём само равенство придется писать уже в векторной форме, так как сила, вызванная вращением

[1] Более того, ускорение свободного падения неодинаково даже по отношению к двум чашкам весов. Поэтому, переставив местами гирю и яблоко, мы в принципе должны получить иные результаты.

Земли, параллельна экваториальной плоскости и в общем случае не параллельна вектору силы тяжести.

4. Верно ли равенство $Q = P$?

Нет, потому что оно не учитывает, что яблоко «плавает» в воздухе (точнее, утонуло в нём), и поэтому из P нужно вычесть силу Архимеда, которая сама меняется вместе с атмосферным давлением.

Нет, потому что на яблоко действуют переменные силы конвекции нагретого и холодного воздуха, переменные силы от перемещающихся внутри яблока молекул и гусеницы.

Нет, потому что на яблоко давят солнечные лучи, причём сила этого давления по абсолютной величине зависит от прозрачности атмосферы, а по направлению – от положения Солнца на небе. Если один бок яблока красный, а другой – зелёный, то они по-разному отражают солнечные лучи, а поэтому равнодействующая светового давления приложена к яблоку не точно по центру и, следовательно, стремится повернуть яблоко вместе со столом и земным шаром. Число световых квантов, падающих на яблоко в единицу времени, случайно, а потому световое давление быстро и беспорядочно меняется (как и давление, вызванное бомбардировкой яблока молекулами воздуха).

Равенство неверно ещё и потому, что, кроме законов Ньютона и Архимеда, на яблоко действует закон Кулона: как только из него под действием света вылетел электрон, яблоко оказалось заряженным положительно и начало притягиваться к этому и другим электронам Вселенной. И хотя яблоко по существу представляет собой раствор многих солей и органических соединений и поэтому является хорошим проводником электричества, но оно изолировано от других проводников изолятором – столом, что позволяет ему заряжаться при вылете электрона. Поскольку электроны внутри яблока движутся, то это создаёт электрический ток, который, взаимодействуя с магнитными полями Земли, солнечной короны и т.д., создаёт дополнительные силы, действующие на яблоко.

А ещё надо учесть, что с того момента, как мы положили яблоко на стол, последний под тяжестью плода начал сильнее давить на пол, и фундамент начал глубже опускаться в почву, постепенно тормозясь и стремясь к новому устойчивому положению. Опускание с торможением приводит к тому, что к силе тяжести яблока добавляется переменная сила инерции от торможения. К тому же приводит вибрация внутри яблока, стола, фундамента и Земли, вызванная тем, что мы положили яблоко на стол с ударом (который имеет место даже при самых больших предосторожностях). Правда, эти вибрации очень быстро затухают практически до нуля, но теоретически – не затухнут полностью никогда. А ещё следует учесть вибрации токарного станка в школьных мастерских на станции Долгинцево, шелест страниц в Белицкой школе, плеск гиппопо в Лимпопо. И так далее.

Как отнестись ко всему изложенному выше?

Как к шутке? Можно и так.

Задача является отчасти авторской пародией на некоторые предыдущие задачи, в которых автор иногда не в меру увлекается подробностями. Её можно рассматривать как шарж (разумеется, дружеский: автор испытывает к самому себе и к своим задачам исключительно дружеские чувства). Но шутливой здесь является только форма. Содержание же задачи *абсолютно серьёзно* – если требуется абсолютная точ-

ность. Задача этой задачи – показать, что всякая физическая задача *бесконечно сложна*, потому что на всякое физическое тело действуют одновременно *все* законы физики. *В том числе и ещё не открытые!*

Физическая задача может быть решена лишь приближённо. И в зависимости от той точности, которая требуется в конкретной ситуации, понадобится учесть меньшее или большее число факторов. И хотя при определении силы давления яблока на стол, видимо, ничего, кроме равенства

$$Q = P\,,$$

на практике не потребуется, но в других задачах может потребоваться многое.

Вы видели, как много требовалось в задаче о зеркалах и Гибралтаре, хотя на первый взгляд она казалась не сложнее задачи с яблоком.

Какие же факторы надо учитывать? Чтобы узнать это, нужно расположить их в ряд по степени важности и отбросить все последние, начиная с того, вклад которого существенно меньше разрешённой вам погрешности. А как их правильно расположить в ряд? Строго говоря, для этого нет другого способа, кроме как вычислить вклад каждого из факторов. Но тогда и упрощённая задача не проще нашей. На практике приходится при оценке многих факторов полагаться на интуицию и опыт, что упрощает задачу, но вносит некоторую долю риска.

Школьник обычно решает задачу ещё проще: подавляющее большинство перечисленных факторов отсеивается само по себе тем, что они не приходят в голову, т.е. не попадают в отсеивающее сито. Так легче решать, но так легче и ошибиться.

117. Звёзды позируют перед фотоаппаратом

А

На рис. 3 (см. задачу «А всё-таки она вертится!») показано звёздное небо. Вследствие суточного вращения Земли изображения звёзд оказались дугообразными. Кружком отмечена звезда Алиот – эпсилон Большой Медведицы. Её звёздная величина равна 1,68. Крестиком отмечена звезда Кохаб – бета Малой Медведицы, имеющая звёздную величину 2,24. Таким образом, Кохаб слабее Алиота на $2{,}24 - 1{,}68 = 0{,}56$ звёздной величины, или в 1,67 раза[1]. Тем не менее на снимке дуга, изображающая звезду Кохаб, получилась не только не слабее, но даже чуть-чуть ярче (толще), чем дуга, вызванная звездой Алиот. Чем это объяснить?

Б

– Возможно, эти звёзды различаются по цвету, а чувствительность фотоплёнки к лучам разной длины волны различна. Обычно фотоплёнка более чувствительна к синим лучам, чем к жёлтым и красным, и если Кохаб голубее Алиота, то этим всё объясняется.

Такое рассуждение является здравым и могло бы нас удовлетворить, если бы звёздный атлас не утверждал обратное: Алиот «голубее» Кохаба! Алиот имеет температуру поверхности 10 000°С и принадлежит к спектральному классу А2 (голубо-

[1] Звезда первой величины ярче звезды шестой величины в 100 раз, т.е. разница в одну звёздную величину соответствует отношению яркостей $\sqrt[5]{100} \approx 2{,}5$.

вато-белая звезда); Кохаб – 3600°С, спектральный класс К5 (оранжевая звезда). Следовательно, это обстоятельство не ослабляло бы, а дополнительно усиливало яркость дуги, изображающей звезду Алиот.

Поэтому нужно искать иную причину.

Чтобы вы не ударились в другую крайность и не решили, что здесь применены специальные светофильтры или фотоматериалы, более чувствительные к оранжевым лучам, чем к остальным, будем считать, что светофильтров нет и чувствительность плёнки от цвета лучей не зависит. Правильный ответ весьма прост, подсказка содержится на само́м рисунке.

В

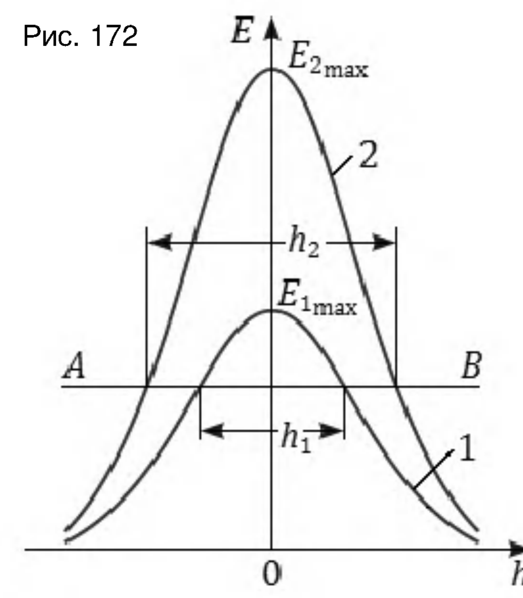
Кохаб (крестик) ближе к полюсу мира, чем Алиот (кружок). Поэтому при одинаковых угловых размерах (15° за час экспозиции) линейные размеры дуги, пройденной Кохабом на фотоплёнке, меньше. Следовательно, изображение Кохаба перемещалось вдоль дуги медленнее, каждый элемент дуги освещался большее время.

Степень почернения фотослоя, как известно, пропорциональна не просто освещённости, а произведению освещённости на продолжительность освещения. Первый сомножитель для Кохаба несколько меньше, чем для Алиота, зато второй существенно больше.

Линейные скорости перемещения по фотоплёнке изображений Кохаба и Алиота пропорциональны их расстояниям от полюса мира (положение которого вы нашли, решая задачу «А всё-таки она вертится!»). Судя по рис. 3, они различаются приблизительно в 2,1 раза.

Освещённость от Кохаба в 1,67 раза слабее, но освещается каждый элемент его дуги в 2,1 раза дольше. Поэтому яркость его дуги на снимке должна быть в $\frac{2,1}{1,67} \approx$ 1,3 раза больше, чем у Алиота.

Рис. 172



На фотографии увеличение яркости приводит к утолщению линии, изображающей путь звезды. Пояснить это можно с помощью рис. 172. В силу несовершенства объектива фотоаппарата звезда проектируется на плёнку не точкой, а пятнышком, в центре которого освещённость E максимальна, а во все стороны от центра спадает по колоколообразной кривой. Кривая 2 изображает распределение освещённости поперёк дуги от звезды вдвое более яркой, чем кривая 1 (все ординаты кривой 2 вдвое больше соответствующих ординат кривой 1). Пусть чувствительность плёнки такова, что и та, и другая звезда превзошли порог насыщения фотослоя AB (т.е. порог его полного почернения). Тогда звезда 1 изобразится на негативе совершенно чёрной дугой с шириной h_1, звезда 2 – дугой с шириной $h_2 > h_1$ (за пределами h_1 и h_2 почернение будет постепенно убывающим).

Таким образом, увеличение яркости преобразуется в увеличение толщины следа звезды.

Впрочем, утолщение дуги будет заметно у более яркой звезды и без насыщения фотослоя: ведь не только на уровне AB, но и на любом другом уровне кривая 2 шире кривой 1, хотя качество фокусировки обеих звёзд (ширина обеих кривых на одной и той же относительной высоте, например, 50% от максимальной освещённости $E_{\max}$) одинаково.

118. Разоблачим автора!

Бди!
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 42

А

Докажите, что рис. 3 (см. задачу «А всё-таки она вертится!») – не истинная фотография звёздного неба, а её грубая подделка.

Б

Кружок, крестик и стрелки ещё не свидетельствуют о подделке: они могли быть нанесены тушью на подлинный негатив. Кстати, это часто и делается в иллюстративных целях.

Для разоблачения фальшивки обратите внимание на изображение звёзд, указанных стрелками (каппа и лямбда Дракона).

В

Как мы нашли в задаче «А всё-таки она вертится!», «снимок» сделан с экспозицией 1 час: именно столько времени требуется, чтобы изображение звезды растянулось в дугу величиной 15°. Но дуга, отмеченная длинной стрелкой, имеет величину порядка 20°, короткой стрелкой – 10°. Для получения такого снимка пришлось бы открыть затвор для каппы Дракона на 0 ч 40 мин, для лямбды – на 1 ч 20 мин, а для всех остальных звёзд – на 1 ч 00 мин.

Возможна ли такая манипуляция затвором? Нет.

Правда, можно было бы спустя 40 мин после начала съёмки повесить в небе экран, закрывающий одну из звёзд, а спустя ещё 20 мин развесить экраны для всех остальных звёзд, кроме одной (лямбды Дракона). Теоретически мыслима ситуация, когда нужные экраны получились бы по счастливой случайности сами, за счёт рваных облаков, которые внезапно возникли в нужных положениях и вращались вместе со звёздами. Но такая случайность была бы слишком маловероятной, а делать множество специальных экранов слишком бессмысленно.

Это ставит подлинность фотографии под большое сомнение. Скорее всего, это подделка, причём автор проявил в ней разоблачающую его небрежность.

И пусть автор не изворачивается, уверяя, что длинная дуга получилась естественным путём, как результат наложения двух более коротких дуг от двух звёзд одинаковой яркости, одинаково отстоящих от полюса мира. Эту уловку отвергнуть легко: в этом случае две дуги на протяжении 10° перекрывались бы, и в области их перекрытия яркость общей дуги была бы удвоенной. Кроме того, звёздный атлас показывает, что в этой области неба просто нет пары звёзд, способной дать наложение.

Бросаются в глаза и другие отступления от правдоподобия: изображены только крупные и средние звёзды, а от множества более слабых нет никаких следов. Далее, яркость поперёк следа постоянна, а за пределами следа скачком падает до нуля, т.е. ведёт себя не так, как яркость на истинном фото, где она должна падать постепенно (рис. 172, см. задачу «Звёзды позируют перед фотоаппаратом»).

С помощью точных приборов можно было бы обнаружить множество других мелких несоответствий: в относительных яркостях отдельных дуг, в расположении звёзд друг относительно друга и т.д.

Автор просит у читателей извинения за подделку и надеется, что она не бросила тень на остальные задачи. На всякий случай он торжественно заверяет, что это была единственная неточность, допущенная умышленно. Можно с полной уверенностью сказать, что других неточностей, просочившихся в книгу наперекор желаниям автора, больше. Сообщите о них, будьте добры!

Объяснительная записка

Пояснительные выражения объясняют тёмные мысли.
КОЗЬМА ПРУТКОВ
«Мысли и афоризмы», № 40

Названием книги и её эпиграфами автор обязан перу известного мыслителя Козьмы Пруткова. Читая книгу, вы убедились, что рассматриваемые в ней вопросы давно привлекали пристальное внимание этого пытливого ума. К сожалению, высказывания Пруткова по некоторым проблемам до сих пор не известны. В своих записках он часто упоминал о сафьянных портфелях с золочёной надписью «Сборник неоконченного (d'inachevé)». Возможно, эти портфели будут ещё найдены.

Не скрою[1]. Один из рецензентов считал, что активное участие Пруткова в этой книге излишне. В подтверждение своего мнения он приводил даже афоризм: *«Без надобности носимый набрюшник – вреден»* (№ 83*а*). Но что из этого следует? Только то, что рецензент сам не устоял перед обаянием великого мыслителя!!! Выдвинув против Пруткова его же мысль о набрюшнике, рецензент этим самым признал, что железная логика Пруткова является могучей силой в научной дискуссии.

Имеется, однако, некоторая вероятность, что будущие критики сумеют найти новые аргументы против Пруткова и автора. Не обладая способностью предвидеть, с какой именно стороны произойдёт нападение, автор хотел бы, пока находится на трибуне, прикрыться авторитетом Пруткова со всех сторон:

«Новые сапоги всегда жмут» (№ 93*а*).

«Не будь цветов, все ходили бы в одноцветных одеяниях» (№ 3*а*).

«И саго, употреблённое не в меру, может причинить вред» (№ 140). Впрочем, кажется, эта стрела летит не в ту сторону. Тогда вот ещё:

«У всякого портного свой взгляд на искусство!» (№ 45*а*).

«Сократ справедливо называет бегущего воина трусом» (№ 8*а*). (См. также афоризмы №№ 44*а*, 60, 151, 153, 2*а*, 147, 145, 115, 139, 138, 88, 73, 116 и другие.)

Наконец, если автор будет всё-таки прижат к стене и у него не останется решительно никаких аргументов, то и тогда ему на выручку придёт его покровитель:

«Не уступай малодушно всеобщим желаниям, если они противны твоим собственным; но лучше, хваля оные притворно и нарочно оттягивая время, норови надуть своих противников» (№ 20*а*).

---

[1] Любимое выражение Козьмы Петровича.

Оглавление

$М\frac{1704000000-011}{053(02)-84}169-84$

ББК 22.3

53

Редакторы Л.А. Панюшкина, Л.В. Митрофанов, В.А. Григорова
Технический редактор С.Я. Шкляр
Корректор Г.С. Вайсберг

ИБ № 12342

Сдано в набор 22.07.83. Подписано к печати 29.11.83
Т-22234. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать.
Условн. печ. л. 18. Усл. кр.- отт. 18,5. Уч.-изд. л. 19,6.
Тираж 500000 экз. (3-й завод 300001-500000 экз.). Заказ № 2001. Цена 75 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А.А. Жданова Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
113054, Москва, М-54, Валовая, 28